# Álgebra II
## Segundo Cuatrimestre — 2007
## Práctica 6

*En esta práctica, un A-módulo será un A-módulo a izquierda.*

1. Determinar si $M$ es un $A$-módulo en cada uno de los siguientes casos:

   *a*) $A = \mathbb{Z}_n$, $M = \mathbb{Z}_m$, $n, m \in \mathbb{N}$, con la suma usual de $\mathbb{Z}_m$ y la acción

   $$a \cdot x = r_m(ax).$$

   *b*) $A = \mathbb{Z}$, $M = M_2(\mathbb{C})$, con la suma usual de matrices y la acción

   $$a \cdot \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot z_{11} & a \cdot z_{12} \\ a \cdot z_{21} & a \cdot z_{22} \end{pmatrix}.$$

   *c*) $A = \mathbb{R}[X]$, $M = \mathbb{R}^n$, con la suma usual de $\mathbb{R}^n$ y la acción

   $$f \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(1).x_1, f(0).x_2, \ldots, f(0).x_n).$$

   *d*) $A = M_n(\mathbb{Z})$, $M = \mathbb{Z}$, con la suma usual de $\mathbb{Z}$ y la acción

   $$a \cdot m = det(a) \cdot m.$$

2. Sean $A$ y $B$ anillos, $M$ un $B$-módulo y $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que la acción $a \cdot_\varphi x = \varphi(a) \cdot x$ define una estructura de $A$-módulo sobre $M$.

3. Determinar si $S$ es un submódulo del $A$-módulo $M$ en cada uno de los siguientes casos:

   *a*) $A = \mathbb{Q}$ , $M = M_n(\mathbb{Q})$ , $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q}) : a_{ii} = 0 \; \forall \, 1 \le i \le n\}$.

   *b*) $A = \mathbb{Z}$ , $M = M_n(\mathbb{Z})$ , $S = \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}) : det(a_{ij}) = 0\}$

   *c*) $A$ un anillo cualquiera , $M = A^n$ , $S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^n : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

   *d*) $A$ un anillo cualquiera , $M = A[X]$ , $S = \{f \in A[X] : f = 0 \text{ ó } gr(f) \le n\} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4. Sean $A$ un anillo conmutativo, $a \in A^{n \times m}$ y $f_a : A^{m \times 1} \to A^{n \times 1}$ la aplicación definida por $f_a(x) = a \cdot x$, donde $\cdot$ es el producto de matrices. Probar que es un morfismo de $A$-módulos.

5. Sean $A$ un anillo conmutativo y $M$ un $A$-módulo. En cada uno de los siguientes casos, probar que $f$ es un morfismo de $A$-módulos, hallar su núcleo, su imagen y determinar si es inyectivo, sobreyectivo o isomorfismo:

   *a)* $f : M^n \longrightarrow M^2$, $f(x) = (x_1 + x_n, x_n)$ $(n > 2)$.
   *b)* $f : M^n \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$.
   *c)* Si $n \leq m$, $f : M^n \longrightarrow M^m$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots 0)$.
   *d)* Si $n \leq m$, $f : M^m \longrightarrow M^n$, $f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$.
   *e)* Fijo $a \in A$, $f : A[X] \longrightarrow A$, $f(p) = p(a)$.
   *f)* $f : M_n(A) \longrightarrow A^n$, $f(a) = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ si $a = (a_{ij})$.
   *g)* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

6. Si $M$ y $N$ son conjuntos y $f : M \longrightarrow N$ es una función, el conjunto

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in M\}$$

   se llama el *gráfico* de $f$. Probar que si $M$ y $N$ son $A$-módulos entonces $f$ es un morfismo de $A$-módulos si y sólo si $\Gamma(f)$ es un submódulo de $M \oplus N$.

7. Sean $A$ un anillo y $M$ un $A$-módulo. Caracterizar el módulo cociente $N/S$ en cada uno de los siguientes casos:

   *a)* $N = M^n$, $S = \{x \in N : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
   *b)* $N = M^n$ $(n > 2)$, $S = \{x \in N : x_1 = x_n \text{ y } x_2 = 0\}$.
   *c)* $N = A[X]$, $S = \{f \in A[X] : f(1) = 0\}$.
   *d)* $N = M_n(A)$, $S = \{(a_{ij} \in M_n(A) : a_{ii} = 0 \; \forall 1 \leq i \leq n\}$.
   *e)* $N = M^J$, $S = \{x \in N : x_i = 0 \; \forall i \in I\}$, donde $I$ es un subconjunto fijo de $J$.

8. Sean $V$ y $W$ dos $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación. Probar que $f$ es una transformación lineal de $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales si, y sólo si, $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ es un morfismo de grupos.

9. Sea $A$ un anillo y sean $M$ y $N$ dos $A$-módulos. Probar que

   *a)* $Hom_A(M, N)$ con la suma definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es un grupo abeliano.
   *b)* Si $A$ es conmutativo, la acción $(a.f)(x) = a.f(x)$ define sobre el grupo abeliano $Hom_A(M, N)$ una estructura de $A$-módulo. Para $A$ no necesariamente conmutativo, esta acción define sobre $Hom_A(M, N)$ una estructura de $\mathcal{Z}(A)$-módulo.

10. Sea $A$ un anillo conmutativo. Dado un $A$-módulo $M$ se llama *dual* de $M$ al $A$-módulo $M^* = Hom_A(M, A)$. Probar que la aplicación $\psi : M \longrightarrow M^{**}$ definida por $\psi(x)(f) = f(x)$ es un morfismo de $A$-módulos y que $\ker(\psi) = \bigcap_{f \in M^*} \ker(f)$.

11. Sea $M$ un $A$-módulo. Probar que $Hom_A(A, M) \simeq M$ como $\mathcal{Z}(A)$-módulos.

12. Probar que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

13. Probar que un $A$-módulo $M$ es simple si, y sólo si, $M \neq \{0\}$ y $A.x = M$ $\forall\, x \in M$ tal que $x \neq 0$.

14. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de $A$-módulos. Probar que:

    *a*) Si $M$ es simple entonces $f = 0$ o $f$ es un monomorfismo.
    *b*) Si $N$ es simple entonces $f = 0$ o $f$ es un epimorfismo.
    *c*) Si $M$ y $N$ son simples entonces $f = 0$ o $f$ es un isomorfismo.

15. Sea $M$ un $A$-módulo simple. Probar que el anillo $End_A(M)$ es un anillo de división.

16. Probar que los grupos abelianos $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}_{>0}$ y $\mathbb{R}_{>0}$ no son finitamente generados

17. Probar que todo módulo de tipo finito posee un sistema de generadores minimal.

18. Sea $A$ un dominio íntegro y sea $a \in M_n(A)$. Sea $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in A^n$. Probar que

    *a*) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente si y sólo si $det(A) \neq 0$.
    *b*) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema de generadores de $A^n$ si y sólo si $\det(A) \in \mathcal{U}(A)$.

19. Sea $A$ un anillo y sea $M$ un $A$-módulo. Probar que si todo conjunto no vacío de submódulos finitamente generados de $M$ tiene un elemento maximal entonces $M$ es Noetheriano

20. Sea $A$ un anillo e $I$ un ideal bilátero. Probar que si $A$ es un anillo Noetheriano entonces $A/I$ también lo es.

21. Dar un ejemplo de

    *a*) Un $A$-módulo finitamente generado que no sea Noetheriano.
    *b*) Un $A$-módulo tal que todo submódulo propio sea finitamente generado y que no sea Noetheriano.

22. Probar que

    *a*) Un $K$-espacio vectorial $V$ es Noetheriano si y sólo si $dim_K(V) < \infty$.
    *b*) Todo anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.
    *c*) $\mathbb{Z}$ y $K[X]$ (con $K$ cuerpo) son anillos Noetherianos.

23. Sea $A$ un anillo y sea $M$ un $A$-módulo. Sea $f \in End_A(M)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $K_n = Ker(f^n)$, $I_n = Im(f^n)$. Probar que

    *a*) $K_1 = K_2 \Rightarrow K_1 \cap I_1 = 0$.
    *b*) $I_1 = I_2 \Rightarrow K_1 + I_1 = M$.
    *c*) Si $M$ es Noetheriano entonces $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \cap I_n = 0$.
    *d*) Si $M$ es Noetheriano y $f$ es un epimorfismo entonces $f$ es un automorfismo.

24. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ es Noetheriano.