
ÁLGEBRA II
Segundo Cuatrimestre — 2007
Práctica 5

1. Sean A y B anillos conmutativos, \mathcal{P} un ideal primo de B y $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos. Probar que $f^{-1}(\mathcal{P})$ es un ideal primo.
2. Caracterizar los anillos cocientes
 - a) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2, X \rangle$
 - b) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2 \rangle$
 - c) $\mathbb{Z}[X]/\langle 2X \rangle$
 - d) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$
 - e) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle$
 - f) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle$
 - g) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2 \rangle$
 - h) $\mathbb{Z}[i]/\langle 2, 1 + i \rangle$
3. Sean A un anillo conmutativo con unidad y A' subanillo con $1 \in A'$. Probar o dar contraejemplo:
 - a) A cuerpo $\Rightarrow A'$ cuerpo
 - b) A dominio íntegro $\Rightarrow A'$ dominio íntegro
 - c) A' dominio íntegro $\Rightarrow A$ dominio íntegro
4. ¿Es $\det : M_n(A) \rightarrow A$ un morfismo de anillos? ¿y la traza?
5. Mostrar isomorfismos de
 - a) $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X \rangle \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$
 - b) $\mathbb{R}[X]/\langle X^4 - 1 \rangle \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$
6. Sean A anillo conmutativo y $f \in A[X]$, $f \neq 0$. Probar que f es divisor de cero en $A[X]$ si, y sólo si, existe $r \in A \setminus \{0\}$ tal que $rf = 0$.
7. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Probar que los siguientes anillos son euclidianos.
 - a) $\mathbb{K}[X, X^{-1}]$, polinomios de Laurent con coeficientes en \mathbb{K} .
 - b) $\mathbb{K}[[X]]$, series formales con coeficientes en \mathbb{K} .
8. Sean A dominio íntegro y $a \in A$. Probar que:
 - a) a primo $\Rightarrow a$ irreducible
 - b) A DFU, a irreducible $\Rightarrow a$ primo
 - c) En $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$: $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}, 1 - 2\sqrt{-5}$ son irreducibles y no primos. ¿Es $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ DFU? ¿Es DF?
9. $A \subseteq B \subseteq C$ dominios íntegros. Buscar algún ejemplo de A y C DFU, pero B no.

10. A dominio íntegro, I ideal propio de A ; $\pi : A \rightarrow A/I$ la proyección canónica. Sean $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ mónico y $\bar{f} = \sum_{i=0}^n \pi(a_i) X^i \in A/I[X]$.
 Probar que:
 f es reducible en $A[X] \Rightarrow \bar{f}$ es reducible en $(A/I)[X]$
11. Sea A DFU y \mathbb{K} su cuerpo de cocientes.
- Probar que si $f, g \in A[X]$ son polinomios primitivos, fg es primitivo.
 - Probar que si $f \in A[X]$ es irreducible, entonces visto como polinomio con coeficientes en \mathbb{K} también es irreducible.
 - Probar que si $f \in A[X]$ es primitivo y f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$ entonces f es irreducible en $A[X]$.
 - Probar que $A[X]$ es DFU.
12. **Criterio de irreducibilidad de Eisenstein:** Sea A un DFU y \mathbb{K} su cuerpo de cocientes. Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$. Supongamos que exista un primo $p \in A$ tal que:
- p no divide a a_n
 - p divide a a_i , $0 \leq i \leq n-1$
 - p^2 no divide a a_0
- Probar que f es irreducible en $\mathbb{K}[X]$
13. **Lema de Gauss:** Sea A un DFU y \mathbb{K} su cuerpo de cocientes.
 Sea $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in A[X]$ con $a_0 \neq 0$. Si p y q son elementos de A no nulos, coprimos entre sí tales que $\frac{p}{q} \in \mathbb{K}$ es raíz de f , demostrar que p/a_0 y q/a_n en A .
14. Probar que todo **ideal primo** de $\mathbb{Z}[X]$ es alguno de los siguientes:
- $\langle p \rangle$ ó $\langle p, f \rangle$ con $p \in \mathbb{Z}$ primo, $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\bar{f} \in \mathbb{Z}_p[X]$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$
 - $\langle f \rangle$ donde f es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[X]$
15. Caracterizar los anillos cocientes:
- $\mathbb{R}[X, Y, Z] / \langle X, Y \rangle$
 - $\mathbb{R}[X, Y, Z] / \langle X - Y^5 \rangle$
 - $\mathbb{R}[X, Y, Z] / \langle Y - Z^3, Z - X^3 \rangle$
16. Mostrar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$ respectivamente.
17. Sea $I = \langle Y + X^2 - 1, XY - 2Y^2 + 2Y \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$. Decidir si $\mathbb{R}[X, Y]/I$ es un cuerpo.