Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2007
Práctica 3

En los siguientes ejercicios estudiamos productos semidirectos de grupos. Estos serán presentados de dos maneras.

La primera es dar H y K subgrupos de G, tales que $H \triangleleft G$, $H \cap K = \{1\}$ y $G = HK$.

Esta situación la notaremos $G = H \cdot_{sd} K$.

La segunda es dar grupos K y H y un morfismo de grupos $\varphi : K \to Aut(H)$. Se define entonces una operación en $H \times K$ como $(h,k)(h',k') = (h\varphi(k)(h'),kk')$.

En este caso notaremos $G = H \rtimes_{\varphi} K$ al producto semidirecto.

1. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G tales que $G = H \cdot_{sd} K$.
    a) Probar que si $K \triangleleft G$ entonces $kh = hk$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$.
    b) Deducir que G es abeliano si y sólo si H y K son abelianos y $K \triangleleft G$.
2. Probar que S_n y D_n ; $n \geq 3$ son isomorfos a productos semidirectos convenientes. Mostrar en ambos casos las dos maneras de hacerlo.
3. ¿Es $\mathcal{H}$ isomorfo a algún producto semidirecto?
4. Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de H y K en cada uno de los siguientes casos. (Elegir la construcción que más te convenga.)
    a) $G = \mathbb{C}^*$ $\quad H = S^1$
    b) $G = G_{12}$ $\quad H = G_3$
    c) $G = G_{12}$ $\quad H = G_2$
    d) $G = \mathbb{C}$ $\quad H = \mathbb{R}$
    e) $G = GL(n,\mathbb{C})$ $\quad H = SL(n,\mathbb{C})$
    f) $G = S_4$ $\quad H = \{1,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}$
5. Sea G un grupo finito y sean H y K subgrupos de G tales que $H \triangleleft G$.

    Probar que $G = H \cdot_{sd} K$ si y sólo si $|G| = |H||K|$ y $H \cap K = \{1\}$.

    Deducir que si $|G| = |H||K|$ y $(|H|,|K|) = 1$ entonces $G = H \cdot_{sd} K$.
6. Sean $H = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Z}_4$. Describir todos los productos semidirectos $G = H \rtimes_{\varphi} K$.

    Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a A_4.
7. Probar en cada uno de los siguientes casos que el grupo G actúa sobre el conjunto X. En cada caso calcular ${}^{G}X$, las G-órbitas de X y el estabilizador de cualquier elemento de X

a) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f.x = f(x)$

b) $G = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = ax + b \text{ con } a \in O_2(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^2\}$, $X = \mathbb{R}^2$ y $f.x = f(x)$

c) $G = \mathbb{R}^*$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a.x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

d) $G = SL(2, \mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by, cx + dy)$

8. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.

9. Sea X un conjunto finito. Determinar el número posible de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

10. Sea G un grupo.

    a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$

    b) Probar que si $G/_{\mathcal{Z}(G)}$ es cíclico entonces G es abeliano

    c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano

    d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.

    e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/_{\mathcal{Z}(G)}$ sea abeliano.

11. Sea p un primo.

    a) Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{Z}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.

    b) Calcular $[G, G]$ con $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

12. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

13. Sea p primo y $|G| = n$. Entonces existe k tal que $n = p^k \Leftrightarrow \forall x \in G$, $ord(x) = p^s$ para algún s. (s depende de x)

14. G es un p-grupo $\Leftrightarrow \forall H \triangleleft G$, H y G/H son p-grupos.

15. Calcular todos los p- subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_2\,, \mathbb{Z}_{12}\,, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}\,, S_3 \oplus \mathbb{Z}_3\,, S_3 \oplus S_3$$

16. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

17. Sean p, q primos , $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

18. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes:

$$30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540, 9075.$$

19. Sea G con $|G| < \infty$ y $p < q$ primos tal que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \lhd G$. Probar

    a) $H_p.H_q$ es subgrupo de G

    b) $H_p.H_q \lhd G \Rightarrow H_q \lhd G$.

20. Sea G un grupo y sea $H \lhd G$. Probar que G es resoluble si y sólo si H y $G \big/ H$ son resolubles.

21. Sean p y q primos distintos. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Todo grupo de orden pq es resoluble.

    b) Todo grupo de orden p^2q es resoluble.

    c) Si p y q son impares, todo grupo de orden $2pq$ es resoluble.

    d) Todo grupo de orden menor que 60 es resoluble.

22. Dado G un grupo finito, se define la sucesión de subgrupos $\left\{G^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} G^{(0)} & = & G \\ G^{(n+1)} & = & [G^{(n)}, G^{(n)}] \ \forall\ n \ \in \mathbb{N} \end{cases}$$

    Probar que G es resoluble si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $G^{(k)} = \{1\}$.