Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2007
Práctica 2

Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G. Se define

$$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X,\, y \in Y\}.$$

Si $x \in G$ escribimos $xH := \{x\}H$.

1. Sea G un grupo y H, K subgrupos de G.
   a) ¿Será cierto que si H y K son subgrupos de G entonces HK es subgrupo de G?
   b) Probar que si H ó K es normal, entonces HK es un subgrupo.
   c) Si H y K son normales, entonces HK es un subgrupo normal.

2. Decidir cuáles de los subgrupos del ejercicio 9 de la práctica 1 son normales.

3. Sea G es un grupo abeliano. Probar que todo subgrupo es normal.

   Probar que el grupo $\mathcal{H}$ es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.

4. Dados los siguientes subgrupos de S_4

   $$H = \{id,\, (1\,2)(3\,4)\} \quad K = \{id,\, (1\,2)(3\,4),\, (1\,3)(2\,4),\, (1\,4)(2\,3)\}$$
   $$U = <(1\,2\,3\,4)>$$

   a) Probar que $H \lhd K$, $K \lhd A_4$ y $K \lhd S_4$.
   b) Probar que H no es normal en A_4 ni en S_4.
   c) Determinar si $U \lhd S_4$.

5. Encontrar todos los subgrupos normales de G.
   a) $G = D_n$, donde n es impar.
   b) $G = D_n$, donde n es par.
   c) $G = \mathcal{H}$.

6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \to G'$ un morfismo. Probar que
   a) $\ker(f) \lhd G$
   b) ¿Es cierto que $\mathrm{im}(f) \lhd G'$?
   c) Recíprocamente si H es un subgrupo normal de G, existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.

7. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \lhd G$.

8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$

   a) $G = \mathbb{R} \qquad S = \mathbb{Z}$
   b) $G = D_n \qquad S =< \rho >$
   c) $G = GL_n(K) \qquad S = SL_n(K) \qquad$ donde K es un cuerpo.
   d) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = S^1$
   e) $G = \mathbb{C}^* \qquad S = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* i$

9. Calcular todos los cocientes de S_3, D_4 y $\mathcal{H}$.

10. Probar que

   a) $\mathbb{C}^* \big/ \mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$
   b) $\mathbb{Z} \big/ m \cdot \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m$
   c) $\mathbb{Q}^* \big/ \mathbb{Q}_{>0} \simeq G_2$
   d) $S^1 \big/ G_n \simeq S^1$
   e) Si $m \mid n$ entonces $G_n \big/ G_m \simeq G_{\frac{n}{m}}$

11. Verificar que $H \lhd G$ y calcular G/H

   a) $G = S_4 \qquad H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
   b) $G = D_6 \qquad H = \{1, \rho^3\}$.
   c) G y H como en el ejercicio 8.

12. *a)* Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \lhd G$. Si $H' = f(H)$, probar que

      1) $H' \lhd G'$
      2) Si f es un isomorfismo, $G \big/ \mathrm{H} \simeq G' \big/ \mathrm{H'}$

   b) ¿Qué pasa si $f : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo, $g : H \longrightarrow H'$ es un isomorfismo, $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ con $G \big/ \mathrm{H}$ y $G' \big/ \mathrm{H'}$

13. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las proyecciones de G en H y K respectivamente. Probar que la aplicación

   $$f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$$

   definida por $f(\overline{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

14. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

   a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).

b) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que

$$\ker(I) = \{a \in G \,:\, ag = ga, \forall g \in G\}$$

Este subgrupo se llama el centro de G y lo notamos $\mathcal{Z}(G)$.
Probar que $\mathrm{im}(I)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$. A este grupo lo notaremos $\mathrm{Int}(G)$.
Deducir que $G/_{\mathcal{Z}(G)} \simeq \mathrm{Int}(G)$.

15. Hallar $\mathcal{Z}(G)$ (el centro de G) en cada uno de los siguientes casos:

    a) $G = D_n$
    b) $G = S_4$
    c) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$
    d) $G = \mathcal{H}$
    e) $GL_n(\mathbb{R})$
    f) $SL_n(\mathbb{R})$

16. Sea G un grupo. Definimos $[G, G]$, el *conmutador* de G, como el subgrupo de G *generado* por todos los elementos de la forma $g^{-1}h^{-1}gh$ ($g, h \in G$).

    a) Probar que $[G, G]$ es un subgrupo normal de G.
    b) Probar que $G/[G, G]$ es un grupo abeliano.
    c) Sea $f : G \to K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Probar que f se factoriza unívocamente por $G/[G, G]$, esto es, existe un único morfismo $\overline{f} : G/[G, G] \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

    $$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\ G/[G,G] \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

    d) Sea $H \subset G$ un subgrupo. Probar que

    $$[G, G] \subseteq H \Leftrightarrow H \triangleleft G \text{ y } G/H \text{ es abeliano.}$$

17. Hallar $[G, G]$ en cada uno de los siguientes casos

    a) $G = D_n$
    b) $G = \mathcal{H}$
    c) $G = S_4$
    d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$

18. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y D_4.

19. Sea p un primo mayor o igual que 3. Si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq D_p$.

20. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.

b) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un elemento de orden k.

c) Si $|G| = n$ y k divide a n, existe un subgrupo de orden k.

d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

e) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.

f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.