ALGEBRA LINEAL

Práctica 7: Espacios vectoriales con producto interno

1. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

   a) $\Phi : k^2 \times k^2 \to k$, $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, con $k = \mathbb{R}$ y $k = \mathbb{C}$;

   b) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\Phi(x, y) = x_1y_1 - ix_1y_2 + ix_2y_1 + 2x_2y_2$;

   c) $\Phi : k^3 \times k^3 \to k$, $\Phi(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_3y_3$, con $k = \mathbb{R}$ y $k = \mathbb{C}$.

2. Sea V un espacio vectorial sobre $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

   a) Mostrar que existe exactamente un producto interno sobre V que hace de $\mathcal{B}$ una base ortonormal.

   b) Determinar ese producto interno explícitamente en los siguientes casos:

      1) $V = \mathbb{R}^2$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, -2)\}$;
      2) $V = \mathbb{R}^3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;
      3) $V = \mathbb{C}^3$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$;
      4) $V = \mathbb{C}^4$, $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, i), (0, 1, 0, i), (i, i, i, 0), (0, 2, 0, 0)\}$;
      5) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{X^i\}_{i=0}^3$;
      6) $V = \mathbb{R}[X]_3$, $k = \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{(X - 1)^i\}_{i=0}^3$.

3. Determinar para que valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la forma bilineal

$$\phi(x, y) = ax_1y_2 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3 + cx_1y_3$$

   resulta un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

4. *a*) Determinar condiciones sobre una matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ de manera que $\langle x, y\rangle = x^tBy$ resulte un producto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle -, -\rangle_V$, y sea $T : W \to V$ una transformación lineal. Definamos

$$\langle x, y\rangle_W = \langle Tx, Ty\rangle_V, \qquad \forall x, y \in W.$$

   Determinar condiciones necesarias y suficientes para que $\langle -, -\rangle_W$ resulte un producto interno.

5. Hallar los complementos ortogonales de los siguientes subespacios, describiendo bases ortonormales de los mismos:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$, con respecto al producto interno usual;

   b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$, con respecto al producto interno dado por
   $$\phi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1;$$

   c) $V = \mathbb{R}[X]_4$, $S = \langle X^2, X^4 + X^2 + 1 \rangle$, con respecto al producto interno dado por
   $$\phi(p, q) = \int_0^1 pq \,\mathrm{d}x;$$

   d) $V = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$ con $f_1(x) = x$, $f_2(x) = e^x$ y $f_3(x) = x^2$, $S = \langle f_1 + f_2 \rangle$, y
   $$\phi(f, g) = f(0)g(0) + \tfrac{1}{2}f(1)g(1) + f(\tfrac{1}{2})g(\tfrac{1}{2}).$$

6. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$, y $\phi(A, B) = \operatorname{tr} AB^*$. Mostrar que ϕ es un producto interno sobre V, y determinar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

7. *a*) Sea $w : [-1, 1] \to \mathbb{R}^+$ una función continua y positiva. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $V = \mathbb{R}[X]_n$, y definamos
   $$\phi(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) \,\mathrm{d}x.$$
   Muestre que ϕ es un producto interno sobre V.

   b) Realice el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ cuando $n = 3$ y $w(x) \equiv 1$.

8. Sea p la proyección ortogonal de $V = \mathbb{R}^3$ sobre su subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in V : 2x_1 - x_2 = 0\}$ con respecto al producto interno usual.

   a) Encontrar todas las rectas $L \subset V$ tales que $p(L) = \{(1, 2, 1)\}$.

   b) Encontrar una recta $L_1 \subset V$ tal que $p(L_1) = L_2$, si $L_2 = \{x \in V : 2x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0\}$.

9. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno determinado por la matriz
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   y sea $\phi \in V^*$ tal que $\phi(x) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3$. Encontrar $v \in V$ tal que $\phi = \langle -, v \rangle$.

10. Determinar f^* si

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_3)$;

   b) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1-i)x_2, x_2 + (3+2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$;

   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que si $\mathcal{B} = \{(1,2,-1), (1,0,0), (0,1,1)\}$, entonces

   $$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

   d) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_2$ tal que $f(p) = p'$, con respecto a los productos internos dados por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$;

   e) $f : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ tal que $f(A) = PAP^{-1}$, para una matriz inversible fija $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y el producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$ en $M_n(\mathbb{C})$.

11. *a*) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que en la base canónica es

   $$[f] = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

   Determinar un producto interno en $\mathbb{R}^3$ para el que f resulte autoadjunta.

   b) ¿Es cierto que para todo endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ de un espacio vectorial real de dimensión finita existe un producto interno $\langle -, - \rangle$ para el cual $f^* = f$?

12. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita con un producto interno, y $S \subset V$ un subespacio. Mostrar que la proyección ortogonal de V en S es un endomorfismo autoadjunto de V. Determine sus autovalores. ¿Hay otros proyectores de V con imagen S que sean autoadjuntos?

13. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $\mathrm{im}(f^*) = (\ker f)^{\perp}$.

14. Sea V un EVPI, y sea $A : V \to V$ una transformación lineal autoadjunta. Dado un subespacio S de V, probar que S es subespacio A-invariante sii $S^{\perp}$ lo es.

15. *a*) Encontrar $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tal que PAP^t sea diagonal, si

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encontrar $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ tal que PAP^* sea diagonal, si

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB^*$. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, sea $t_M : A \in V \to MA \in V$. Mostrar que t_M es un endomorfismo unitario sii M es unitaria.

17. *a*) Si V es un espacio vectorial real con un producto interno, es

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2,$$

cualesquiera sean $x, y \in V$.

b) Si V es un espacio vectorial complejo con un producto interno, es

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 + \frac{i}{4}\|x-iy\|^4,$$

cualesquiera sean $x, y \in V$.

c) Mostrar que la suma de dos productos internos es un producto interno.

18. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, y sea $T \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo autoadjunto. Mostrar:

a) $\|v + iTv\| = \|v - iTv\|$, cualquiera sea $v \in V$;

b) $v + iTv = w + iTw$ sii $v = w$;

c) $Id + iT$ e $Id - iT$ son inversibles;

d) $U = (Id + iT)(Id - iT)^{-1} \in \operatorname{End}(V)$ es unitario—U se llama la *transformada de Cayley* de T;

e) el endomorfismo U *determina* a T.

19. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita con un producto interno, y sea T un operador normal, de manera que $TT^* = T^*T$.

a) $T = T_1 + iT_2$ con $T_1, T_2 \in \text{End}(V)$ operadores autoadjuntos que conmutan.

b) Si T es nilpotente, $T = 0$.

c) Existe $f \in \mathbb{C}[X]$ tal que $T^* = f(T)$.

20. Una matriz real cuadrada simétrica A posee una raíz cúbica simétrica.

21. Hallar en cada caso una matriz real simétrica que verifique:

    a) $1, 2, -1$ son sus autovalores y tiene algún autovector en $S = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.

    b) $-1, -1, 3, 0$ son sus autovalores y algunos de sus autovectores pertenecen a $S = \{(x, y, z, w) : 2x - y + z + w = 0; x - y - w = 0\}$.