Álgebra Lineal

Práctica 6: Forma normal de Jordan.

1. Determinar la forma normal de Jordan y una base de Jordan para las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. ¿Cuántas clases de semejanza hay de matrices en $M_8(\mathbb{C})$ cuyo polinomio minimal es x^3? ¿Y en $M_8(\mathbb{R})$?.

3. ¿Para qué valores de n es cierto el siguiente enunciado?

   > Dos endomorfismos nilpotentes de $\mathbb{C}^n$ con el mismo polinomio minimal y con el mismo rango son semejantes.

4. Hallar una base en la que se realice la forma normal de Jordan, y la forma de Jordan, de la matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ con

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j; \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

5. Decidir si existen endomorfismos tales que

a) $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^8)$, nilpotente, y

$$(rgf, rgf^2, rgf^3, rgf^4, rgf^5) = (6, 4, 3, 1, 0);$$

b) $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{16})$, $m_f = X^5$, y

$$(rgf, rgf^2, rgf^3, rgf^4, rgf^5) = (9, 5, 3, 1, 0).$$

¿Cuántas clases de semejanza hay?

6. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo que en la base canónica tiene matriz $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar su polinomio característico y determinar proyectores sobre los espacios $V_{\lambda,m} = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda.Id)^m = 0\}$, donde λ recorre el conjunto de autovalores de f y m es en cada caso la multiplicidad del autovalor como raíz del polinomio característico.

7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Si $\lambda \in k$, sea $V_\lambda = \{v \in V : \exists m : (f - \lambda)^m(v) = 0\}$, y sea $V_\lambda^n = \{v \in V : (f - \lambda)^n(v) = 0\}$. Sea $h \in k[X]$.

   a) $\ker h(f)$ y $\mathrm{im}\, h(f)$ son f-invariantes.

   b) Si $\lambda \in k$ es raiz de h, entonces $V_\lambda^1 \subset \ker h(f)$.

   c) Si $\lambda \in k$ es raiz de h de multiplicidad n, entonces $V_\lambda^n \subset \ker h(f)$.

   d) Si $\lambda \in k$ no es raiz de h, entonces $V_\lambda^1 \subset \mathrm{im}\, h(f)$, y, de hecho, es $V_\lambda \subset \mathrm{im}\, h(f)$.

8. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $\mathcal{X}_A(x) = (x-2)^4(x-3)^2$; $m_A(x) = (x-2)^2(x-3)^2$.

   b) $\mathcal{X}_A(x) = (x-7)^5$; $m_A(x) = (x-7)^2$.

   c) $\mathcal{X}_A(x) = (x-2)^7$; $m_A(x) = (x-2)^3$.

   d) $\mathcal{X}_A(x) = (x-3)^4(x-5)^4$; $m_A(x) = (x-3)^2(x-5)^2$.

9. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y que cumple, simultáneamente:

   $rg(A - \lambda_1 Id) = 13$, $rg(A - \lambda_1 Id)^2 = 11$, $rg(A - \lambda_1 Id)^3 = 10$, $rg(A - \lambda_1 Id)^4 = 10$, $rg(A - \lambda_2 Id) = 13$, $rg(A - \lambda_2 Id)^2 = 11$, $rg(A - \lambda_2 Id)^3 = 10$, $rg(A - \lambda_2 Id)^4 = 9$, $rg(A - \lambda_3 Id) = 13$, $rg(A - \lambda_3 Id)^2 = 12$, $rg(A - \lambda_3 Id)^3 = 11$.

   Hallar su forma de Jordan.

10. Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es cierto que

    Dos matrices en $M_n(\mathbb{C})$ son semejantes sii tienen el mismo polinomio característico y minimal.

11. Sea $J = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ un bloque de Jordan.

    a) Calcular J^m.

    b) Calcular $f(J)$ si $f \in \mathbb{R}[X]$.

    c) Sea $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$ una serie de potencias de radio de convergencia más grande que $|\lambda|$. Mostrar que $\sum_{i \geq 0} a_i J^i$ converge y determinar su suma.

    d) Calcular e^J, $\sin J$, $\cos J$.

    e) Calcular e^A, $\sin A$, $\cos A$ para algunas de las matrices del ejercicio 1.

12. *a*) Sea $N \in M_3(\mathbb{C})$ nilpotente, y sea $A = 1 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$. Mostrar que A es una raiz cuadrada de $1 + A$.

    b) Desarrollando la función $(1+x)^{1/2}$ en su serie de Taylor, muestre que toda matriz de la forma $1 + N$ con N nilpotente admite raíces cuadradas. ¿Cuántas?

    c) Muestre que un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente de índice de nilpotencia máximo no posee raíces cuadradas.

13. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ conmutan, $e^{A+B} = e^A e^B$.

14. Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ con $\dim V = 6$ de polinomio minimal X^6, y supongamos que $\{v_1, \dots, v_6\}$ es base de Jordan para f. Encontrar la forma de Jordan para f^2, f^3, f^4 y f^5, y bases que las realicen.

15. Sean $x, y \in k^n$, y $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ tal que $a_{ij} = x_i y_j$. Mostrar que el rango de A es 1, determinar sus autovalores, y mostrar que es diagonalizable.

16. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, y $f \in \mathrm{End}(V)$ con V un espacio vectorial de dimensión finita. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = \mathrm{Id}$, f es diagonalizable.

17. Sea $J = J(\lambda, n)$ un bloque de Jordan de $n \times n$ con autovalor $\lambda \in k$, y sea $C(J) = \{A \in M_n(k) : AJ = JA\}$. Muestre que

    $$C(J) = \{p(J) : p \in k[X]\}.$$