ALGEBRA LINEAL

**Práctica 5: Autovalores, autovectores, diagonalización**

1. *a*) Calcular el polinomio característico, los autovalores y autovectores de las siguientes matrices, considerando por separado el caso en que los coeficientes están en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$:

   1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$;

   2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

   3) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

   4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

   5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$;

   6) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

   7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$;

   8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   En todos los casos, $a \in \mathbb{K}$.

   *b*) Interprete cada una de las matrices del ítem anterior como la matriz de una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente) con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$, y encuentre, cuando es posible, una base $\mathcal{B}$ de manera tal que $[f]_\mathcal{B}$ es diagonal; en ese caso, encuentre la matriz de cambio de base $C(\mathcal{E}, \mathcal{B})$.

2. *a*) Sea $A \in M_n(k)$. Mostrar que $A$ y $A^t$ tienen los mismos autovalores. Mostrar con un ejemplo que no sucede lo mismo con los autovectores.

   *b*) ¿Qué puede decir de los autovalores de $A^k$ si conoce los de $A$?

   *c*) Probar que si $A$ es inversible, entonces 0 no es autovalor de $A$, y si $x$ es un autovector de $A$, entonces $x$ es un autovector de $A^{-1}$.

3. Dada la matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y el polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

   *a*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *a*) P = X-1, b) $P = X^2 - 1$, $c) P = (X-1)^2$.

   *b*) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$.

4. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

*a*) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

*b*) Calcular $A^{1000}$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

*c*) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

*d*) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a $A^{-1}$ como combinación lineal de $A$ y de $I_2$.

5. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices y comparar con el característico:

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ , ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , iii) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ , iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , vi) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , vii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

*a*) Encontrar una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_B$ sea diagonal.

*b*) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

*c*) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

8. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

9. *a*) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un proyector de un espacio vectorial de dimensión finita $V$ tal que $\dim \operatorname{im} f = s$. Determinar su polinomio característico, y mostrar que es diagonalizable.

   *b*) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo nilpotente de índice de nilpotencia $l$. Determinar su polinomio característico. ¿Cuándo es diagonalizable?

   *c*) Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo de un espacio vectorial real tal que $f^2 + I = 0$. Mostrar que $f$ es un automorfismo y que $\dim V$ es par.

10. *a*) Sean $A, D \in M_n(k)$ y $C \in \mathrm{GL}_n(k)$ tales que $A = CDC^{-1}$. Mostrar que $A^k = CD^kC^{-1}$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

    *b*) Calcular

    $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$$

    para cada $n \in \mathbb{N}$.

    *c*) El objetivo de esta parte es encontrar una formula cerrada para la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ y, si $n \geq 0$,

    $$a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n.$$

    Considere el endomorfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que, en la base canónica, está representado por la matriz

    $$[f] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Muestre que, para cada $n \geq 0$ es

    $$f\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Encuentre ahora una base que diagonalice a $f$ cuando esto sea posible, y use la primera parte de este ejercicio y el hecho de que

$$f^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

para obtener una fórmula cerrada para $a_n$ en esos casos.

11. *a*) Determinar que matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in k$, $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_5\}$, son diagonalizables.
    *b*) Mostrar que toda matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ es o bien diagonalizable o bien similar a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ para algún $a \in \mathbb{C}$.

12. *a*) Sea $A \in M_2(\mathbb{C})$ tal que todos sus coeficientes son reales y tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1+i \\ 2-i \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector correspondiente al autovalor $1 + 3i$. Mostrar que $A$ es diagonalizable, encontrar una base de autovectores, y determinar $A$.
    *b*) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ es un autovector de autovalor $\sqrt{2}$, y tal que $\chi_A \in \mathbb{Q}[t]$. Determinar si $A$ es diagonalizable. ¿Cuántas matrices satisfacen estas condiciones?.

13. *a*) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr} A = -4$. Calcular los autovalores de $A$ sabiendo que los de $A^2 + 2A$ son $-1$, $3$ y $8$.
    *b*) Sea $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 6$, tiene a $1$ y a $-2$ como autovalores, y tal que $A - 3$ tiene a $-4$ como autovalor. Determinar los restantes autovalores de $A$

14. Determinar los autovalores y autovectores de

$$D : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

15. Un endomorfismo $f \in \operatorname{End}(V)$ de rango 1 es diagonalizable sii $\ker f \cap \operatorname{im} f = 0$.

16. Sean $A \in M_{m,n}(k)$ y $B \in M_{n,m}(k)$. Mostrar que las matrices de bloques

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

de $M_{n+n}(k)$ son semejantes. Concluir que

$$\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$$

17. Sea $A \in M_n(k)$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las raices de su polinomio característico contadas con multiplicidad. Mostrar que $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$ y que $\det A = \prod \lambda_i$.

18. *a*) Mostrar que si $p, q \in k[X]$ son coprimos, $f \in \operatorname{End}(V)$, y $v \in V$ son tales que $p(f)(v) = q(f)(v) = 0$, entonces $v = 0$.

    *b*) ¿Es cierto que si $p, q \in k[X]$ y $f \in \operatorname{End}(V)$ son tales que $p(f)q(f) = 0$, entonces $p(f) = 0$ ó $q(f) = 0$?

    *c*) Muestre que existe $p \in k[X]$ tal que hay más de $\deg p$ matrices $A \in M_n(k)$ tales que $p(A) = 0$.

19. Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$ son semejantes, entonces $\chi_A = \chi_B$ y que $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

20. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostrar que el polinomio minimal de $A$ considerada como matriz real coincide con el polinomio minimal de $A$ considerada como matriz compleja.

21. Determinar los polinomios minimal y característico de las siguientes transformaciones lineales:

    *a*) $f : \mathbb{R}[X]_3 \to \mathbb{R}[X]_3$ dada por $f(p) = p' + 2p$;

    *b*) $f : M_n(k) \to M_n(k)$ dada por $f(A) = A^t$;

    *c*) $f : M_n(k) \to M_n(k)$ dada por $f(A) = BA$ para una matriz $B \in M_n(k)$ fija.

22. Mostrar que si $d : f \in \mathbb{R}[X] \mapsto f' \in \mathbb{R}[X]$ es el endomorfismo de $\mathbb{R}[X]$ dado por la derivación, no existe $p \in \mathbb{R}[R] \setminus 0$ tal que $p(d) = 0$.

23. *a*) Calcular $A^{1000}$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    *b*) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determinar $A^{-1}$, $A^3$ y $A^{-3}$.

24. Mostrar que $f \in \operatorname{End}(V)$ es un isomorfismo sii $\chi_f(0) \neq 0$. En ese caso, determinar a $f^{-1}$ como polinomio en $f$.

25. Mostrar que un endomorfismo $f$ de un espacio vectorial complejo $V$ de dimensión finita tal que su único autovalor es 0 es nilpotente. ¿Qué sucede en el caso real?

26. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{tr} A = 0$. Mostrar que $A$ es semejante a una matriz $B$ que tiene su diagonal nula.

27. Determinar el polinomio minimal de un proyector $p \in \operatorname{End}(V)$ tal que $\dim \operatorname{im} p = s$.

28. Sea $V$ un $k$-espacio vectorial de dimensión finita.

*a*) Si $f \in \mathrm{End}(V)$ es diagonalizable, y $S \subset V$ es un subespacio $f$-invariante, entonces $f|_S$ es diagonalizable.

*b*) Sean $f, g \in \mathrm{End}(V)$ tales que $fg = gf$. Mostrar que si $\lambda \in k$ y $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$, entonces $V_\lambda$ es $g$-invariante.

*c*) Sean $f, g \in \mathrm{End}(V)$ dos endomorfismos diagonalizables de $V$ tales que $fg = gf$. Entonces son diagonalizables *simultáneamente*, es decir, existe una base $\mathcal{B}$ de $V$ tal que $[f]_B$ y $[g]_B$ son simultáneamente diagonales.

*d*) Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ diagonalizable y con exactamente $\dim V$ autovalores distintos. Mostrar que si $g \in \mathrm{End}(V)$ es tal que $fg = gf$, entonces $g$ es diagonalizable. ¿Qué sucede cuando $f$ posee autovalores con multiplicidad más grande que 1?

29. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita. Determine todos los endomorfismos $f \in \mathrm{End}(V)$ tales que todo subespacio $S \subset V$ es $f$-invariante.

30. Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ de un espacio vectorial es *semisimple* si todo subespacio $f$-invariante $S \subset V$ admite un complemento en $V$ que es $f$-invariante.

    *a*) Muestre que un endomorfismo diagonalizable es semisimple.

    *b*) Muestre que si $k$ es algebraicamente cerrado, todo endomorfismo semisimple es diaginalizable.

    *c*) Dé un ejemplo de un endomorfismo semisimple no diagonalizable

31. Mostrar que si $k$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, $V$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre $k$ y $f \in \mathrm{End}(V)$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de $V$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

    ¿Es necesaria la hipótesis hecha sobre el cuerpo?

32. Determinar *todas* las matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ tales que $A^2 + \mathrm{Id} = 0$.

33. Mostrar que $\chi_{A^t} = \chi_A$ y que $m_{A^t} = m_A$ cualquiera sea $A \in M_n(k)$.

34. *a*) Dar un ejemplo de un par de matrices $A$ y $B$ tal que $m_{AB} \neq m_{BA}$.

    *b*) Mostrar que si $f \in k[X]$ y $A, B \in M_n(k)$, entonces $ABf(AB) = Af(BA)B$.

    *c*) Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$, entonces $m_{AB} = m_{BA}$ ó $m_{AB} = Xm_{BA}$ ó $m_{BA} = Xm_{AB}$.

    *d*) Mostrar que si $A, B \in M_n(k)$, entonces $\mathrm{Id} - AB$ es inversible sii $\mathrm{Id} - BA$ es inversible.

35. Determine la validez de los siguientes enunciados:

*a*) Si $A$ es diagonalizable, $A^2$ también.

*b*) Si $A$ es diagonalizable y $\lambda \in k$, entonces, $\lambda A$ es diagonalizable.

*c*) Si $A$ y $B$ son diagonalizables, $A + B$ es diagonalizable.

*d*) Si $A$ y $B$ son diagonalizables, $AB$ es diagonalizable.

*e*) Si $A$ y $B$ son diagonalizables y $AB = BA$, entonces $A + B$ y $AB$ son diagonalizables.

36. Mostrar que en $M_2(\mathbb{C})$ no hay tres matrices linealmente independientes que conmuten entre sí.

    ¿Puede determinar el tamaño máximo de un conjunto de matrices linealmente independientes que conmutan entre sí en $M_3(\mathbb{C})$?