ALGEBRA LINEAL

Práctica 4: Determinantes

1. *a*) Sea $A = (a_{ij}) \in M_6(k)$. ¿Con qué signos aparecen los siguientes monomios en el desarrollo de $\det A$?

   I) $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$;

   II) $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$.

   b) Sea $A = (a_{ij}) \in M_4(k)$. Escribir todos los términos de $\det A$ que poseen el factor a_{23} y que tienen signo $+$.

   c) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de X^4 y X^5 en

$$\det \begin{pmatrix} 2X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

   d) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de a^6 y b^6 en

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcular los siguientes determinantes:

   a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$ una matriz triangular superior. Mostrar que $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4. *a*) Sean $A \in M_n(k)$, $B \in M_m(k)$ y $C \in M_{n,m}(k)$, y sea $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ la matriz de bloques. Mostrar que $\det M = \det A \cdot \det B$.

   b) Sea $l \geq 1$, $n_1, \dots, n_l \geq 1$, y $A_i \in M_{n_i}(k)$ si $1 \leq i \leq l$. Mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_l \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{l} \det A_i.$$

   c) Si $A, B, C, D \in M_n(k)$ y A es inversible, muestre que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - ACA^{-1}B).$$

5. Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & & & \\ \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & & & \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & & & & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

7. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$. Mostrar que $\det A > 0$.

8. Sea $A \in k^{n\times n}$ y sea $\alpha \in k$. Probar que $\det(A - \alpha.\mathit{Id}) = 0$ si y sólo si existe $v \in k^n$ tal que $A.v = \alpha.v$.

9. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det A = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}$$

10. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Probar que no existe $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible tal que $AC = CB$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

11. *a*) Sean $v_1 = (a, b, c)$ y $v_2 = (d, e, f)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Probar que la función $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\phi(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

b) Con las mismas notaciones del ítem anterior, probar que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente, $\phi(x, y, z) = 0$ es una ecuación implícita para el subespacio $< v_1, v_2 >$.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B = (b_{ij})$ una matriz tal que $\det(A + B) = \det(A - B)$. Probar que B es inversible si y sólo si $b_{11} \neq b_{21}$.

13. *a*) Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$. Sea A la matriz de Vandermonde $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $\det A = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)$.

b) Calcular

I) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$ II) $\det \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix}$

14. Sea $A \in M_n(k)$.

    a) Mostrar que $\operatorname{rk} A \geq s$ sii A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

    b) Mostrar que $\operatorname{rk} A$ es el mayor entero s tal que A posee un menor $s \times s$ con determinante no nulo.

15. Sea $A \in M_n(k)$ inversible. Calcular $\det(\operatorname{adj} A)$.

16. *a*) Si $A \in M_n(k)$ es antisimétrica y n es impar, mostrar que $\det A = 0$.

    b) Si $A \in M_n(k)$ es ortogonal, es decir, si $A \cdot A^t = \mathbb{I}d$, mostrar que $\det A = \pm 1$.