ALGEBRA LINEAL

Práctica 2: Transformaciones lineales

1. *a*) Encuentre un ejemplo de un espacio vectorial V y una aplicación $f : V \to V$ tal que sea $f(v+w) = f(v) + f(w)$ para todo par de vectores $v, w \in V$, pero que no sea lineal.

   b) Encuentre un ejemplo de un espacio vectorial V y una aplicación $g : V \to V$ tal que $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ para todo $\lambda \in k$, $v \in V$ pero que no sea lineal.

2. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3\,, 0\,, 3x_2 + 2x_3)$.

   b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2\,, 2x_2\,, 1 + x_1)$.

   c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

   d) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

   e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$.

   f) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$.

   g) $\mathrm{tr} : M_n(k) \to k$.

   h) $t : k^{n\times m} \to k^{m\times n}$, $t(A) = A^t$.

   i) $L_A : B \in M_{n,m}(k) \mapsto AB \in M_{p,m}(k)$, para cada $A \in M_{p,n}(k)$.

   j) $\frac{d}{dx} : f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   k) $\mathrm{ev}_a : p \in k[X] \mapsto p(a) \in k$, con $a \in k$.

   l) $t : z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

   m) $Im : z \in \mathbb{C} \mapsto Im(z) \in \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

   n) $I : f \in C_{\mathbb{R}}([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$.

   ñ) $L : C_{\mathbb{R}}([0,1]) \to C_{\mathbb{R}}([0,1])$ con $Lf(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

3. Interpretar geométricamente las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x, y) = (x, 0)$.

   b) $f(x, y) = (0, y)$.

   c) $f(x, y) = (x, -y)$.

d) $f(x,y) = (\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y))$.

e) $f(x,y) = (x\cos t - y\operatorname{sen} t\,,\; x\operatorname{sen} t + y\cos t)$, donde $t \in \mathbb{R}$ fijo .

4. *a*) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

   b) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$; $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

   c) Sean f , $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(-1,0,0) = (1,2,1); f(2,1,0) = (2,1,0); f(1,0,1) = (1,2,1)$$

$$g(1,1,1) = (1,1,0); g(2,2,-1) = (3,-1,2); g(3,2,1) = (0,0,1)$$

   Determinar si $f = g$.

   d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga

$$f(1,-1,1) = (2,a,-1); f(1,-1,2) = (a^2,-1,1) \text{ y } f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$$

5. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales. Muestre que

   a) $\ker f \subset \ker g \circ f$.

   b) $\ker f = \ker g \circ f$ si $\operatorname{im} f \cap \ker g = \{0\}$.

   c) $\operatorname{im} g \supset \operatorname{im} g \circ f$.

   d) $\operatorname{im} g = \operatorname{im} g \circ f$ si $\operatorname{im} f = V$.

6. *a*) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

   b) Sean $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1,1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \operatorname{im} f$?

   c) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

   d) Sean $S, T \subseteq \mathbb{R}^4$ subespacios definidos por:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 + x_4 = 0\,,\; x_2 - x_3 = 0\}$$

   ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

   e) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\operatorname{im} f = S$ y $\ker f = T$ en los siguientes casos:

      1) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}, T = \langle(1,2,1)\rangle$.

      2) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}, T = \langle(1,-2,1)\rangle$.

7. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

   a) $(1,1,0) \in \ker f$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} f) = 1$.
   b) $\ker f \cap \operatorname{im} f = \langle (1,1,2) \rangle$.
   c) $f \neq 0$ y $\ker f \subseteq \operatorname{im} f$.
   d) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.
   e) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$.
   f) $\ker f \neq \{0\}, \operatorname{im} f \neq \{0\}$ y $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

8. Sean $\alpha_i, \beta_i \in k$ para $i = 0, \dots, n$, con α_i distinto de α_j si i es distinto de j. Muestre que existe exactamente un polinomio $p \in \mathbb{R}[X]$ de grado n tal que $p(\alpha_i) = \beta_i$ si $0 \leq i \leq n$. Para ello considere la aplicación

$$p \in \mathbb{R}[X]_n \mapsto \begin{pmatrix} p(\alpha_0) \\ \vdots \\ p(\alpha_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

9. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V. Muestre que

   a) $\dim \ker f \cap \operatorname{im} f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.
   b) $\ker f \subset \operatorname{im} f$ sii $\dim \ker f = \dim \operatorname{im} f - \dim \operatorname{im} f^2$.
   c) $\operatorname{im} f \subset \ker f$ sii $f^2 = 0$.
   d) $\operatorname{im} f = \ker f$ sii $f^2 = 0$ y $\dim \operatorname{im} f = \dim \ker f$.

10. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_{\mathcal{B}} : V \to k^n$ de la siguiente manera: si $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ entonces $\alpha_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \dots, x_n)$. Probar que $\alpha_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo.

    Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación $\alpha_{\mathcal{B}}$ corresponde a tomar coordenadas en la base $\mathcal{B}$, $\alpha_{\mathcal{B}}$ nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

    a) $\{w_1, \dots, w_s\}$ es l.i. en $V \iff \{\alpha_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, \alpha_{\mathcal{B}}(w_s)\}$ es l.i. en k^n.
    b) $\{w_1, \dots, w_r\}$ genera $V \iff \{\alpha_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, \alpha_{\mathcal{B}}(w_r)\}$ genera k^n.
    c) $\{w_1, \dots, w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_{\mathcal{B}}(w_1), \dots, \alpha_{\mathcal{B}}(w_n)\}$ es una base de k^n.

11. ¿Qué sucesiónes $(d_k)_{k \geq 1}$ se pueden obtener a partir de un endomorfismo $f : V \to V$ de un espacio vectorial de dimensión n poniendo $d_k = \dim \ker f^k$?

12. Si $f, g : V \to V$ son endomorfismos, probar que:

$$\dim \operatorname{im} f \circ g \leq \text{mín}\{\dim \operatorname{im} f, \dim \operatorname{im} g\}.$$

¿Hay un enunciado similar para las dimensiones de los núcleos?

13. Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ transformaciones lineales.

    a) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f es un monomorfismo.

    b) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g es un epimorfismo.

Morfismos nilpotentes

14. *a*) Sea V un k-espacio vectorial de dimensión finita, Probar que un endomorfismo $f : V \to V$ es nilpotente sii $f^n = 0$ con $n = \dim V$.

    b) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Construya, para cada $1 \leq k < n$, endomorfismos $f_k : V \to V$ de manera que $f_k^k = 0$ pero $f_k^{k-1} \neq 0$.

    c) Muestre que si $f, g : V \to V$ son endomorfismos nilpotentes y son tales que $f \circ g = g \circ f$, entonces $f + g$ y $f \circ g$ son nilpotentes. ¿Es necesaria la hipótesis sobre la conmutatividad?

15. Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión $n \geq 1$, y sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente de V de índice de nilpotencia n, de manera que es $f^n = 0$ pero $f^{n-1} \neq 0$. Muestre que existe una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $f(v_i) = v_{i+1}$ si $0 \leq i < n$, y $f(v_n) = 0$.

16. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo nilpotente de un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

    a) Sea $t \in \mathbb{Q}$ y $\exp tf : V \to V$ el endomorfismo

    $$\exp tf = \sum_{j \geq 0} \frac{t^j f^j}{j!}.$$

    Observe que esta definición tiene sentido porque la suma es finita.

    1) $\exp(t+s)f = \exp tf \cdot \exp sf$.
    2) $\exp tf$ es un automofismo de V y $(\exp tf)^{-1} = \exp(-t)f$.

    b) Sea $g = \sum_{j \geq 0} f^j$. Muestre que g y $1 - f$ son automorfismos inversos de V.

Morfismos idempotentes

17. Sea V un k-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es un *proyector* o un endomorfismo *idempotente* de V si y sólo si $f \circ f = f$.

    Probar que $f : V \to V$ es un proyector $\iff f(v) = v \;\; \forall\, v \in \operatorname{im} f$.

18. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

    a) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\operatorname{im} f = \langle(-2, 1, 1)\rangle$.

    b) $\ker f = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\operatorname{im} f = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

19. Sea V un k-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que

    a) $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

    b) Si $\dim_k V = n$ y S y T son subespacios de V tales que $V = S \oplus T$, probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\ker f = S$ e $\operatorname{im} f = T$.

Matriz de una transformación lineal

20. Dada $f : V \to V$, calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $V = W = k^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 + 3x_1, 2x_1 + x_2, x_3 - x_2)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de k^3.

    b) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$

    1) $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
    2) $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

    c) $V = k[X]_n$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$.

    d) $V = k[X]_n$, $f(p) = p'$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{(x - \lambda)^i : i = 0, \ldots, n\}$, con $l \in k$.

    e) $V = k[X]_n$, $f(p) = \int_0^X p(\xi)\, d\xi$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$.

    f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

21. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en términos de sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$.

b) Hallar una base de $\ker f$ y una base de $\operatorname{im} f$.

c) Describir $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$$

a) Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$CAD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

23. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de k^3. Encontrar bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ tales que sea $C(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = C(\mathcal{B}'', \mathcal{B}) = M$.

24. Sean V y W k-espacios vectoriales y sea $Hom_k(V, W)$ el conjunto de transformaciones k-lineales de V en W. Probar que $Hom_k(V, W)$ es un k-espacio vectorial con las operaciones habituales y que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son respectivamente bases finitas de V y W entonces la función

$$T : Hom_k(V, W) \to k^{m \times n}$$

definida por $T(f) = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es un isomorfismo lineal.

25. Recordemos que si $A = (a_{ij}) \in M_n(k)$, la traza de A es $\operatorname{tr} A = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii}$. Sea V un espacio vectorial sobre k y $f \in \operatorname{End}(V)$, y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de V. Mostrar que

$$\operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$$

de manera que tiene sentido definir la traza de f como

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr}[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}},$$

ya que esta definición no depende de $\mathcal{B}$.

26. Bases adaptadas:

   a) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión n finita, y sea $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo de V tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

   $$([f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   b) Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión n finita, y sea $p \in \operatorname{End}(V)$ un proyector. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ de V y un entero d con $0 \leq d \leq n$ tal que

   $$([p]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq d \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   c) Sean V y W espacio vectorial sobre k de dimensiones n y m finitas respectivamente, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ de V, una base $\mathcal{B}'$ de W, y un entero no negativo s tal que

   $$([f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

27. Sean $A, B \in M_n(k)$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existe $C \in GL_n(k)$ tal que $A = CBC^{-1}$.

   b) Dada una base $\mathcal{B}$ de k^n, existe una transformación lineal $f : k^n \to k^n$ y una base $\mathcal{B}'$ tales que $[f]_{\mathcal{B}} = A$ y $[f]_{\mathcal{B}'} = B$.

Cuerpos finitos

Sea k un cuerpo finito de q elementos.

28. Determine el número de bases que posee k^n.

29. Determine el número $(n)_q!$ de automorfismos que posee k^n.

30. Determine el número $\binom{n}{l}_q$ de subespacios que posee k^n de dimensión l para cada $0 \leq l \leq n$.

31. *a*) Muestre que

   $$\binom{n}{l-1}_q + q^l \binom{n}{l}_q = \binom{n+1}{l}_q.$$

b) Muestre que

$$\binom{n}{l}_q = \frac{(n)_q!}{(l)_q!(n-l)_q!}.$$

32. Determine el número de morfismos $k^n \to k^m$. ¿Cuántos de éstos son monomorfismos? ¿Cuántos epimorfismos?