ALGEBRA I - Práctica 6

Primer Cuatrimestre - 2008

1. Hallar $\mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(z)$, $|z|$, $\mathrm{Re}\,(z^{-1})$, $\mathrm{Im}\,(z^{-1})$, $\mathrm{Re}\,(-i.z)$ y $\mathrm{Im}\,(i.z)$ en cada uno de los siguientes casos

i) $z = (2+i)(1+3\,i)$ ii) $z = 5\,i(1+i)^4$

iii) $z = (\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2(\overline{1-3\,i})$ iv) $z = i^{17} + \frac{1}{2}\,i(1-i)^3$

v) $z = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i)^{179}$ vi) $(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i)^{-1}[1+(2-i)^2]$

2. Dados $z = 1+3\,i$ y $w = 4+2\,i$, representar en el plano los siguientes números complejos

i) z ii) w iii) $z+w$ iv) $z-w$ v) $-z$

vi) $\overline{z}$ vii) $2z$ viii) $\frac{1}{2}w$ ix) $|z|$ x) $|w-z|$

3. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 3\,\mathrm{Re}\,(z) - 1 = 2\,\mathrm{Im}\,(z)\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1 \text{ y } |z| \leq 2\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 2 \leq |z-1+i| \leq 3\}$

iv) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z.\mathrm{Im}\,(z).(1-i) = |z|^2\}$

v) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2| = |z-1-i|\}$

4. Probar que

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ ii) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

iii) $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ iv) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{\,-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

v) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$ vi) $z.\overline{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

vii) $|z.w| = |z|.|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ viii) $|z^{-1}| = |z|^{\,-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

ix) $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ x) $||z| - |w|| \leq |z-w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

xi) $|\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ xii) $|\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

5. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

i) $z \neq 0$ y $z = \overline{z}^{\,-1}$ ii) $\mathrm{Re}\,(z^2) = 0$

iii) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ iv) $|z|^2 = (z+\overline{z}).\mathrm{Im}\,(z)$

v) $z^2 + |z^2| = i.\overline{z}$ vi) $|z - \overline{z}| = \mathrm{Re}\,(z)$

vii) $i(z^2+4) = z.\mathrm{Im}\,(z)$ viii) $z^2 = 3+4i$

ix) $z \neq 0$ y $z - 1 = z^{-1}$ x) $z^2 + (1+2i)z + 2i = 0$

6. Calcular los módulos y los argumentos de los siguientes números complejos

i) $3+\sqrt{3}\,i$ ii) $(2+2\,i)(\sqrt{3}-i)$ iii) $(-1-i)^{-1}$

iv) $(-1+\sqrt{3}\,i)^5$ v) $-\cos\frac{8}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{8}{3}\pi$ vi) $\cos\frac{4}{7}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-4}{7}\pi$

vii) $\cos\frac{11}{5}\pi - i\,\mathrm{sen}\,\frac{19}{5}\pi$ viii) $\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi + i\,\cos\frac{3}{4}\pi$ ix) $\cos\frac{55}{3}\pi - \mathrm{sen}\,\frac{56}{3}\pi$

7. Graficar en el plano complejo

i) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| \geq 2 \text{ y } \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$
ii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, \arg(-i.z) > \frac{\pi}{4}\}$
iii) $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} \,/\, |z| < 3 \text{ y } \arg(z^4) \leq \pi\}$

8. i) Calcular $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{17}$

ii) Calcular $(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$

iii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}\,i)$

9. Calcular las raíces n-ésimas de z en los casos

i) $n = 6$, $z = 8$
ii) $n = 4$, $z = -3$
iii) $n = 7$, $z = -1 + i$
iv) $n = 11$, $z = \dfrac{2\,i}{\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}$

10. Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

i) $z^4 = i\,\overline{z}^3$
ii) $z^6 = (2-2i)^{10}$
iii) $z^8 = \overline{z}^8$
iv) $(z-1)^4 = (\overline{z}+i)^4$
v) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$
vi) $(z+1)^4 = (z+i)^2$

11. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{w \in \mathbb{C} \,/\, w^n = 1\}$. Probar que

i) G_n tiene n elementos
ii) $z, w \in G_n \Longrightarrow z.w \in G_n$
iii) $w \in G_n \Longrightarrow w^{-1} \in G_n$
iv) $w \in G_n \Longrightarrow |w| = 1$
v) $w \in G_n \Longrightarrow \overline{w} \in G_n$
vi) $-1 \in G_n \Longleftrightarrow n$ es par
vii) todo elemento de G_n es una potencia de $\cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$

12. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $G_n \cap G_m = G_{(n:m)}$
ii) $G_n \subseteq G_m \Longleftrightarrow n \mid m$

Definición: Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $w \in \mathbb{C}$. Diremos que w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si $w \in G_n$ y para todo $z \in G_n$ existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z = w^r$.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $k \in \mathbb{N}$ entonces w^k es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$

ii) $w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $(n : k) = 1$

iii) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $\overline{w}$ lo es.

iv) Probar $w \in G_n$ es una raíz n-ésima de la unidad primitiva si y sólo si $w \notin G_k$ para todo divisor propio $k \in \mathbb{N}$ de n (es decir, $k|n$ y $k < n$).

14. Determinar las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12.

15. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad si y sólo si $w^n = 1$ y $w^j \neq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j < n$

ii) si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad entonces $w^k = 1$ si y sólo si $n \mid k$

16. Sea w una raíz novena primitiva de la unidad. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $w^{5n} = w^3$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$.

i) Calcular $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}$ para cada $w \in G_n$. Deducir que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.

ii) Probar que el producto de todas las raíces n-ésimas de la unidad es $(-1)^{n-1}$

18. Calcular la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad para $n = 2, 3, 4, 5, 8, 10$ y 15.

19. Dado un número primo p, probar que:

i) la suma de las raíces p-ésimas primitivas de la unidad es -1.

ii) la suma de las raíces p^2-ésimas primitivas de la unidad es 0.

iii) Si q es un número primo distinto de p, entonces la suma de las raíces pq-ésimas primitivas de la unidad es 1.

*iv) ¿Cuánto da la suma de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad si n es un producto de primos distintos?

20. i) Calcular $w + \overline{w} + (w + w^2)^2 - w^{38}(1 - w^2)$ para cada $w \in G_7$

ii) Calcular $w^{73} + \overline{w}.w^9 + 8$ para cada $w \in G_3$

iii) Calcular $1 + w^2 + w^{-2} + w^4 + w^{-4}$ para cada $w \in G_{10}$

iv) Calcular $w^{14} + w^{-8} + \overline{w}^4 + \overline{w^{-3}}$ para cada $w \in G_5$

21. Probar que si $w \in G_7$ entonces $\operatorname{Re}\left((w^{31} + 1)(w^{18} - 1)\right) = 0$

22. Sea w una raíz quinceava primitiva de la unidad.

i) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} w^{5i} = 0$

ii) Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} w^{3i} = 0$

23. Sea w una raíz cúbica primitiva de la unidad y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números complejos definida por

$$z_1 = 1 + w, \qquad z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que z_n es una raíz sexta primitiva de la unidad para todo $n \in \mathbb{N}$