ALGEBRA I - Práctica 5

Primer Cuatrimestre - 2008

1. i) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 22\ (14)$. Hallar el resto de dividir a a por 2, por 7 y por 14
ii) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \equiv 13\ (5)$. Hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5
iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i.i!$ por 36

2. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 \equiv 3\ (11)$
ii) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3\ (13)$
iii) Probar que $a^2 \equiv -1\ (5) \iff a \equiv 2\ (5)$ ó $a \equiv 3\ (5)$
iv) Probar que $a^7 \equiv a\ (7),\ \forall\, a \in \mathbb{Z}$
v) Probar que $3 \mid a^2 + b^2 \iff 3 \mid a$ y $3 \mid b$
vi) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \iff 7 \mid a$ y $7 \mid b$
vii) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 \iff a \equiv 2b\ (5)$ ó $a \equiv 3b\ (5)$
viii) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \implies 5 \mid a$ ó $5 \mid b$
ix) Probar que cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b^2 + c^2 + 1$ no es divisible por 8

3. Sea a un entero impar que no es divisible por 5

i) Probar que $a^4 \equiv 1\ (10)$
ii) Probar que a y a^{45321} tienen el mismo resto en la división por 10

4. i) Probar que $2^{5n} \equiv 1\ (31)$ para todo $n \in \mathbb{N}$
ii) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31
iii) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39\ (31)$, hallar el resto de la división de k por 5
iv) Hallar el resto de la división de $43.2^{163} + 11.5^{221} + 61^{999}$ por 31

5. i) Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$
ii) Hallar el resto de la división de 5^{2267} por 32

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Probar que

i) $3 \mid a$ ó $3 \mid b$
ii) $5 \mid a$ ó $5 \mid b$ ó $5 \mid c$
iii) $4 \mid a$ ó $4 \mid b$

7. Enunciar y demostrar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11

8. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4
Sugerencia: probar primero que un número congruente a 3 módulo 4 distinto de 1 y -1 necesariamente es divisible por un primo congruente a 3 módulo 4. Luego probar que si existieran finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, entonces $a = -1 + 4.\displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y -1 que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

9. Determinar, cuando existan, todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

i) $5a + 8b = 3$ ii) $7a + 11b = 10$
iii) $24a + 14b = 7$ iv) $20a + 16b = 36$
v) $39a - 24b = 6$ vi) $1555a - 300b = 11$

10. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?

11. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

i) $17X \equiv 3\ (11)$ ii) $56X \equiv 2\ (884)$
ii) $56X \equiv 28\ (35)$ iv) $33X \equiv 27\ (45)$

12. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5.

13. Hallar el resto de la división de a por p en los casos

i) $a = 33^{1427}$, $p = 5$
ii) $a = 71^{22283}$, $p = 11$
iii) $a = 5.7^{2451} + 3.65^{2345} - 23.8^{138}$, $p = 13$

14. Hallar todos los primos positivos p tales que $p \mid 2^p + 5$

15. i) Resolver la ecuación de congruencia $2^{13}X \equiv 5\ (11)$
ii) Resolver la ecuación de congruencia $2^{94}X \equiv 7\ (97)$

16. Sean p y q dos primos positivos distintos. Probar que si a es un entero coprimo con pq entonces $p.q \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$

17. Probar que si a es un entero coprimo con 561 entonces $561 \mid a^{560} - 1$

18. Probar que, para todo $a \in \mathbb{Z}$,

i) $728 \mid a^{27} - a^3$
ii) $880 \mid a^{64} - a^4$
iii) $\dfrac{2a^7}{35} + \dfrac{a}{7} - \dfrac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$

19. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $7^n \equiv 5\ (13)$

20. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^{236} \equiv 6\ (19)$

21. Probar que $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

22. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(3^{n+1} + 4^n : 4^{n+1} - 3^n) \neq 1$

23. Sea p un primo, $p > 2$ y sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p \not| a$. Probar que $p^n \mid a^{(p-1)p^{n-1}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comparar con el ejercicio 19. i) de la práctica 4.

Sugerencia: En el paso inductivo notar que $a^{(p-1)p^n} - 1 = (a^{(p-1)p^{n-1}})^p - 1^p$ y usar el ejercicio 8 de la práctica 2

24. i) Hallar el resto de la división de 3^{3603} por 5^3

ii) Hallar el resto de la división de 7^{542} por 81

25. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 0 \quad (8) \\ a \equiv 2 \quad (5) \\ a \equiv 1 \quad (21) \end{cases}$$

26. Hallar todos los enteros a que satisfacen simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 3 \quad (10) \\ a \equiv 2 \quad (7) \\ a \equiv 5 \quad (9) \end{cases}$$

27. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 \quad (6) \\ a \equiv 2 \quad (20) \\ a \equiv 3 \quad (9) \end{cases}$$

28. Determinar si existe algún entero a que satisfaga simultáneamente

$$\begin{cases} a \equiv 1 \quad (12) \\ a \equiv 7 \quad (10) \\ a \equiv 4 \quad (9) \end{cases}$$

y, en caso afirmativo, hallarlos todos.

29. Sabiendo que los restos de la división de un entero a por 3, 5 y 8 son 2, 3 y 5 respectivamente, hallar el resto de la división de a por 120.

30. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?

31. ¿Existe algún entero a cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?

32. Hallar el menor entero positivo a que satisfaga **simultáneamente** las dos condiciones siguientes:
a) el resto de la división de a por 21 es 13.
b) el resto de la división de $6a$ por 15 es 9.

33. Hallar un entero a entre 60 y 90 tal que el resto de la división de $2a$ por 3 sea 1 y el resto de la división de $7a$ por 10 sea 8.

34. Calcular el resto de la división de $\displaystyle\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$ por 56

35. i) Hallar el resto de la división de $3.7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$ por 70

ii) Hallar el resto de la división de 3^{385} por 400
iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$

36. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $3^n \equiv 53\ (77)$

37. Hallar el resto de la división de 2^{2^n} por 13 para cada $n \in \mathbb{N}$

38. i) Probar que $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$ ó 7. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales vale 7
ii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$
iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(11a^6 + 1 : 90) = 5$
iv) Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$. Hallar el resto de la división de a por 70
v) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$
vi) Hallar todos los enteros positivos a tales que $(4a^{62} - a : 11a) \neq a$
vii) Para cada entero a hallar $(a^{18} + 413 : 3^2.5.7^3)$

39. Hallar todos los divisores positivos de 25^{70} que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.

40. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(5^{n+1} - 9^n : 9^{n+1} + 39\,a\,5^n) = 22$. Hallar el resto de la división de a por 44.