ISSN en trámite

Fascículo 7

Notas de matemática

Norberto Fava

Desigualdades relacionadas con la convexidad de funciones

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2021

Notas de matemática

Fascículo 7

ISSN en trámite

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Desigualdades relacionadas con la convexidad de funciones

N. Fava

Resumen

Se trata de la relación entre promedios aritméticos y promedios geométricos y sus consecuencias más importantes: las desigualdades de Hölder y de Minkowski. En el último párrafo se estudia la relación entre segmento afín y segmento métrico en espacios $l^r(n)$.

1. Introducción. Esta nota se inspira fuertemente en un capítulo del clásico libro de Hardy, Littlewood y Polya [1] que trata de la relación entre promedios aritméticos y promedios geométricos y sus consecuencias, las desigualdades de Hölder y de Minkowski. La diferencia con respecto a la obra citada reside en el empleo sistemático de la convexidad, lo que permite comprender de entrada el fundamento geométrico de los teoremas y sirve para aliviar las demostraciones elementales aunque por ello algo pesadas de aquel capítulo.

El libro de Roberts y Varberg [3] contiene aplicaciones de la convexidad a la optimización; el libro de Zygmund [4] estudia las propiedades de las funciones convexas que interesan al Análisis Real. El artículo pionero de Jensen [2] tiene valor histórico.

En forma exagerada se ha dicho que el Análisis es primordialmente el estudio de las desigualdades. Sin embargo la afirmación contiene una parte de verdad, en vista del papel que ellas desempeñan. Una consideración especial merecen los casos de igualdad.

2. Funciones convexas. La función f se llama *convexa* en un intervalo si para cualquier subintervalo (a, b) del mismo, el arco $(x, f(x))$, $a < x < b$, yace por debajo de la cuerda que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$, lo que equivale a decir que para cualquier punto P de dicho arco la pendiente de la cuerda AP es menor que la pendiente de la cuerda PB. Es decir,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \quad \text{si } a < x < b, \tag{1}$$

o bien:

$$f(x) < \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) \quad (a < x < b). \tag{2}$$

El dominio de la función será siempre un intervalo en sentido amplio, que puede ser una semirrecta o bien toda la recta.

Con vistas a su generalización conviene escribir la relación (2) poniendo

$$q_1 = \frac{b-x}{b-a}, \quad q_2 = \frac{x-a}{b-a}, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b,$$

con lo que q_1 y q_2 son números positivos que suman 1 y la relación que define la convexidad se escribe en la forma

$$f(q_1 a_1 + q_2 a_2) < q_1 f(a_1) + q_2 f(a_2),$$

a menos que a_1 y a_2 coincidan, en cuyo caso se verifica la igualdad entre los miembros.

> A veces se define la convexidad usando la relación $\leqslant$ en lugar de $<$, lo que permite incluir entre las convexas a las funciones lineales. Si se adoptara esa clasificación más amplia, las funciones convexas de esta nota deberían llamarse 'estrictamente convexas'.

Diremos que f es *cóncava* en un intervalo si $-f$ es convexa, lo que equivale a decir que si los números q_1 y q_2 son positivos y suman 1, entonces $f(q_1 a_1 + q_2 a_2) > q_1 f(a_1) + q_2 f(a_2)$, a menos que sea $a_1 = a_2$.

Con el teorema del valor medio se prueba fácilmente que la relación (1) se cumple si la derivada $f'(x)$ existe y es estrictamente creciente, o bien si la derivada segunda $f''(x)$ existe y es positiva. Simétricamente, f es cóncava si f' es estrictamente decreciente o bien si f'' es negativa, con lo que tenemos dos criterios muy simples de convexidad y concavidad en un intervalo.

Teorema 1. *Si $f(x)$ es convexa en un intervalo, entonces para cualquier n-upla de números positivos $q_1, q_2, \dots, q_n$ que verifiquen $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ y cualquier n-upla $a_1, a_2, \dots a_n$ de puntos del intervalo se cumple la* ***desigualdad de Jensen:***

$$f\left(\sum q_i a_i\right) < \sum q_i f(a_i), \tag{3}$$

a menos que todos los a_i sean iguales. En el caso de una función cóncava debe invertirse la relación cambiando "$<$" por "$>$".

La demostración se realiza por inducción sobre n. En efecto, para $n > 2$ podemos escribir

$$q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots q_n a_n = (q_1 + q_2)\left(\frac{q_1}{q_1+q_2} a_1 + \frac{q_2}{q_1+q_2} a_2\right) + q_3 a_3 + \cdots + q_n a_n.$$

Si la afirmación del teorema se verifica para $(n-1)$-uplas, tendremos

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right) < (q_1+q_2)\, f\left(\frac{q_1}{q_1+q_2} a_1 + \frac{q_2}{q_1+q_2} a_2\right) + q_3 f(a_3) + \cdots + q_n f(a_n),$$

a menos que se cumpla $\dfrac{q_1}{q_1+q_2}a_1 + \dfrac{q_2}{q_1+q_2}a_2 \;=\; a_3 = \cdots = a_n$. A su vez

$$(q_1+q_2)\, f\left(\frac{q_1}{q_1+q_2}a_1 + \frac{q_2}{q_1+q_2}a_2\right) < q_1 f(a_1) + q_2 f(a_2),$$

a menos que se cumpla $a_1 = a_2$.

Por consiguiente, para que se cumpla la igualdad entre los miembros de (3) deberá ser $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

El hecho de que la suma $\sum q_i a_i$ pertenezca al dominio de la función es consecuencia del mismo proceso inductivo o bien más directamente del hecho de que esa suma está comprendida entre el mínimo $m = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ y el máximo $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$.

En toda la nota el símbolo $\log$ denota el logaritmo natural.

Ejemplos

Dejamos al lector la demostración de las siguientes afirmaciones.

1. La función exponencial $f(x) = e^x$ es convexa sobre todo el eje real, pues $f''(x) = e^x > 0$.

2. La función $\phi(x) = x \log x$ es convexa sobre la semirrecta $x > 0$ y puede extenderse al origen por continuidad definiendo $\phi(0) = 0$, con lo que se obtiene una función convexa continua sobre la semirrecta cerrada $x \geqslant 0$.

3. Para $p \geqslant 1$ la función $\psi(x) = x(\log x)^p$ es convexa sobre la semirrecta $x > 0$ y puede extenderse por continuidad al origen como en el ejemplo anterior.

4. La función $f(x) = \log x$ es cóncava sobre la semirrecta positiva $x > 0$.

5. La función $g(x) = \operatorname{sen} x$ es cóncava en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$

   .

Notación. Para simplificar la notación escribiremos la desigualdad (3) en la forma

$$f\left(\sum qa\right) < \sum q f(a).$$

3. Promedios aritméticos y promedios geométricos. Un caso particular importante ocurre cuando todos los nḿeros q son iguales a $1/n$. En tal caso, la suma $\sum qa$ es el *promedio aritmético:*

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

El *promedio geométrico* de una n-upla de números no negativos es el número

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \;=\; a_1^{1/n} a_2^{1/n} \cdots a_n^{1/n}.$$

Es claro entonces que $G = 0$ si alguno de ellos es 0.

En adelante trataremos con n-uplas de números no negativos:

$$(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad (b) = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad \text{etc.};$$

y $(q) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ será siempre una n-upla de números positivos que verifican:

$$\sum q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1.$$

Con estos números formamos unos promedios más generales, a saber:

$$A(a,q) = \sum qa = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots q_n a_n \quad \text{(promedio aritmético de los números } a \text{ con pesos } q),$$

$$G(a,q) = \prod a^q = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_n^{q_n} \quad \text{(promedio geométrico de los números } a \text{ con pesos } q).$$

En caso de que alguno de los números a sea nulo, pondremos $G(a,q) = 0$.

Teorema 2. $G(a,q) \leqslant A(a,q)$. *La igualdad se cumple sólo si los números a son iguales entre sí.*

La demostración es inmediata si alguno de los a es 0, en cuyo caso $G(a,q) = 0 < A(a,q)$, salvo que todos los a sean nulos. Si ningún a es nulo, el teorema sigue del hecho de que la función logarítmica es estrictamente creciente y cóncava:

$$\log G(a,q) = \sum q \log a < \log\left(\sum qa\right) = \log A(a,q),$$

a menos que los a sean iguales entre sí.

4. Promedios de orden r. Conviene considerar unos promedios aritméticos todavía más generales, con pesos q y exponente r. Para cualquier $r \neq 0$ definimos:

(4) $$M_r(a,q) = \left(\sum qa^r\right)^{1/r} = \left(q_1 a_1^r + q_2 a_2^r + \cdots q_n a_n^r\right)^{1/r},$$

salvo que algún a sea nulo y $r < 0$, en cuyo caso definimos $M_r(a,q) = 0$.

Enseguida se probará que

(5) $$\lim_{r \to 0} M_r(a,q) = G(a,q),$$

lo que justifica definir M_0 por la fórmula $M_0(a,q) = G(a,q)$.

Veamos antes otros dos casos especiales:

1. Notemos que $M_1(a,q) = A(a,q)$.
2. El promedio $M_{-1}(a,q) = \left(\sum \dfrac{q}{a}\right)^{-1}$ (inverso del promedio de los inversos) recibe el nombre de *promedio armónico* y se denota por $H(a,q)$.

Para probar (5) supongamos primero que todos los a son positivos. Entonces la regla de L'Hospital aplicada a la función

$$f(r) = \log M_r(a,q) = \frac{\log\left(\sum qa^r\right)}{r} \tag{6}$$

nos da:

$$\lim_{r\to 0} f(r) = \lim_{r\to 0} \frac{\log\left(\sum qa^r \log a\right)}{\sum qa^r} = \sum q\log a = \log G(a,q).$$

Por otro lado, si algún a es 0, $G(a,q) = 0$ y se prueba que en tal caso $M_r(a,q) \to 0$ cuando $r \to 0+$. Por ejemplo, si $a_1 = 0$, entonces $q_2a_2^r + \cdots q_na_n^r$ tiende a un número < 1 cuando $r \to 0+$ y por consiguiente es menor que un número $\lambda < 1$ para r suficientemente pequeño, de donde $M_r(a,q) < \lambda^{1/r}$ en un intervalo $0 < r < \delta$. En el presente caso para $r \leqslant 0$, $M_r(a,q) = 0$.

Problemas

1. Poniendo $(\lambda a) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$, si $\lambda \geqslant 0$ tendremos $M_r(\lambda a, q) = \lambda M_r(a,q)$.
2. Si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es una permutación de los números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces
$$\sum \frac{b}{a} \geqslant n.$$
3. Si $0 \leqslant \alpha_i \leqslant \pi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, entonces $\sum \operatorname{sen}\alpha < n \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sum\alpha}{n}\right)$, a menos que todos los α sean iguales entre sí. Use esta afirmación para probar que entre todos los polígonos de n lados inscriptos en una circunferencia, el que tiene área máxima es el n-gono regular.
4. Si $0 < x < \pi/2$, entonces $\operatorname{sen} x > (2/\pi)\,x$.
5. Si todos los a son positivos, $M_{-r}(a,q) = \dfrac{1}{M_r(1/a,\ q)}$.
6. Probar $\lim\limits_{r\to+\infty} M_r(a,q) = \max a$, $\quad \lim\limits_{r\to-\infty} M_r(a,q) = \min a$. *Sugerencia:* llamando a_M al máximo de los a y q_M al peso correspondiente, tendremos $q_M^{1/r} a_M \leqslant M_r(a,q) \leqslant a_M$.

Teorema 3. *Si $r < s$, entonces $M_r(a,q) < M_s(a,q)$, a menos que los a sean todos iguales, o bien que $s \leqslant 0$ y algún a sea nulo.*

Suponiendo primero que todos los a son positivos, volvamos a considerar la función (6):

$$f(r) = \log M_r(a,q) = \frac{\log\left(\sum qa^r\right)}{r} \quad (r \neq 0),$$

cuya derivada puede escribirse así:

$$f'(r) = \frac{\sum qa^r \log a^r - \left(\sum qa^r\right)\log\left(\sum qa^r\right)}{r^2\left(\sum qa^r\right)}.$$

Con ayuda de la función convexa $\phi(x) = x\log x$ para $x > 0$, con $\phi(0) = 0$, esa derivada puede expresarse del modo siguiente:

$$f'(r) = \frac{\sum q\phi(a^r) - \phi\left(\sum qa^r\right)}{r^2\left(\sum qa^r\right)},$$

lo que demuestra que $f'(r) > 0$ para $r \neq 0$, a menos que los a sean iguales entre sí. Entonces f es estrictamente creciente en el caso de que los a sean positivos y no todos iguales.

Para concluir basta observar que la última fórmula se mantiene válida aunque algunos a sean nulos, mientras no lo sean todos.

Un caso particular del teorema 3 es la relación entre los promedios armónico, geométrico y aritmético . En efecto:

$$H(a,q) = M_{-1}(a,q), \quad G(a,q) = M_0(a,q), \quad A(a,q) = M_1(a,q),$$

de donde se deducen las relaciones $H \leqslant G \leqslant A$, ya conocidas por Pappus para promedios de dos números positivos ($n = 2$):

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right\}^{-1} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

5. Desigualdad de Hölder. Comenzamos esta sección por dos definiciones. Una n-upla (a) se llama *nula* si para todo i, $a_i = 0$. Diremos que dos n-uplas (a) y (b) son *proporcionales* si existen números λ y μ, al menos uno distinto de cero, tales que

$$\lambda a_i = \mu b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Notemos que si μ fuera 0, debería ser $\lambda \neq 0$ y por consiguiente (a) sería nula. Se sigue que si (a) y (b) son proporcionales y no nulas, entonces λ y μ pueden considerarse ambos positivos. Fácilmente se ve que la n-upla nula es equivalente a cualquier otra y que la proporcionalidad restringida a las n-uplas no nulas es una relación de equivalencia.

En el teorema que sigue $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ son m números positivos que suman 1:

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1.$$

Teorema 4. (desigualdad de Hölder) *Si* $(a), (b), \ldots, (l)$ *son* m n*-uplas de números no negativos, entonces*

$$\sum a^{\alpha} b^{\beta} \cdots l^{\lambda} < \left(\sum a\right)^{\alpha} \left(\sum b\right)^{\beta} \cdots \left(\sum l\right)^{\lambda}, \tag{7}$$

a menos que dos cualesquiera de las n*-uplas sean proporcionales, o bien que alguna de ellas sea nula.*

Si ninguna de las n-uplas es nula, podemos formar el cociente entre los miembros de (7), obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\sum a^{\alpha} b^{\beta} \cdots l^{\lambda}}{\left(\sum a\right)^{\alpha} \left(\sum b\right)^{\beta} \cdots \left(\sum l\right)^{\lambda}} &= \sum \left(\frac{a}{\sum a}\right)^{\alpha} \left(\frac{b}{\sum b}\right)^{\beta} \cdots \left(\frac{l}{\sum l}\right)^{\lambda} \\ &\leqslant \sum \left(\alpha \frac{a}{\sum a} + \beta \frac{b}{\sum b} + \cdots + \lambda \frac{l}{\sum l}\right) = \alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1. \end{aligned}$$

La igualdad sólo se cumple si en cada término $\dfrac{a}{\sum a} = \dfrac{b}{\sum b} = \cdots = \dfrac{l}{\sum l}$.

El caso $m = 2$ merece una consideración especial. En tal caso tendremos dos números positivos α y β tales que $\alpha + \beta = 1$, y la desigualdad de Hölder afirma que

$$\sum a^{\alpha} b^{\beta} \leqslant \left(\sum a\right)^{\alpha} \left(\sum b\right)^{\beta},$$

con igualdad sólo si (a) y (b) son proporcionales.

Poniendo $a^{1/\alpha}$ y $b^{1/\beta}$ en lugar de a y b, obtenemos $\sum ab < \left(\sum a^{1/\alpha}\right)^{\alpha} \left(\sum b^{1/\beta}\right)^{\beta}$, a menos que las n-uplas $(a^{1/\alpha})$ y $(b^{1/\beta})$ sean proporcionales.

La expresión usual del enunciado se obtiene poniendo $r = 1/\alpha$ y $r' = 1/\beta$, con lo que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \quad \text{o bien} \quad r' = \frac{r}{r-1}, \tag{8}$$

y la desigualdad de Hölder en este caso toma la forma

$$\sum ab \leqslant \left(\sum a^{r}\right)^{1/r} \left(\sum b^{r'}\right)^{1/r'}, \tag{9}$$

con igualdad sólo si las n-uplas (a^{r}) y $(b^{r'})$ son proporcionales.

Los números r y r' (ambos mayores que 1) que satisfacen la relación (8) se llaman *conjugados*. Es evidente entonces que la relación entre conjugados es recíproca.

La célebre desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\left(\sum ab\right)^2 \leqslant \left(\sum a^2\right)\left(\sum b^2\right)$, con igualdad sólo si (a) y (b) son proporcionales es el caso particular de (9) que corresponde a $r = 2$ y $r' = 2$. Sin embargo existen para este caso demostraciones más simples y directas. Una de ellas se basa en la desigualdad elemental $xy < \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, salvo que sea $x = y$. En efecto, poniendo $A^2 = \sum a^2$ y $B^2 = \sum b^2$, basta demostrarla para $A > 0$ y $B > 0$. En tal suposición sumamos miembro a miembro las desigualdades

$$\frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B} \leqslant \frac{1}{2}\frac{a^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{B^2},$$

para obtener $(\sum ab)/AB \leqslant 1$, con igualdad sólo si en cada una se cumple $a/A = b/B$.

Problemas

1. Si los números a son positivos, $(\sum a)(\sum 1/a) \geqslant n^2$.

2. Si hay números a positivos y distintos, la función $\psi(r) = \log M_r^r = r \log M_r$ es convexa sobre la semirrecta $r > 0$. Sugerencia: siendo $0 < r < s$, pongamos $t = (1-\alpha)r + \alpha s$, con $0 < \alpha < 1$. Entonces $\sum qa^t = \sum (qa^r)^{1-\alpha}(qa^s)^\alpha \leqslant (\sum qa^r)^{1-\alpha}(\sum qa^s)^\alpha$.

6. Desigualdad de Minkowski. Por brevedad escribiremos $M_r(a)$ en lugar de $M_r(a, q)$. Dadas (a) y (b), el símbolo $(a + b)$ denotará la n-upla cuyo i-ésimo componente es $a_i + b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y si λ es un número no negativo, $\lambda(a) = (\lambda a)$ es la n-upla cuyo i-ésimo componente es λa_i. Para indicar que (a) y (b) son proporcionales escribiremos $(a) \sim (b)$.

La desigualdad de Minkowski es la que expresa el siguiente teorema.

Teorema 5. *Si $r > 1$, $M_r(a + b) \leqslant M_r(a) + M_r(b)$, con igualdad sólo si $(a) \sim (b)$.*

Es útil recordar que para $\lambda \geqslant 0$ se cumple $M_r(\lambda a) = \lambda M_r(a)$. Luego, si $(a) \sim (b)$ y (a) no es nula, existe un número $\lambda \geqslant 0$ tal tal que $(b) = (\lambda a)$ y por consiguiente

$$M_r(a + b) = M_r(a + \lambda a) = M_r((1 + \lambda)a) = (1 + \lambda)M_r(a) = M_r(a) + M_r(b).$$

Para probar la afirmación del teorema podemos suponer que ninguna de las n-uplas (a) ó (b) es nula. Teniendo presente que r' (el conjugado de r) verifica $1/r + 1/r' = 1$, tendremos:

$$\begin{aligned}\{M_r(a+b)\}^r &= \sum q(a+b)^r = \sum q(a+b)(a+b)^{r-1} = \sum qa(a+b)^{r-1} + \sum qb(a+b)^{r-1} \\ &= \sum q^{1/r}a \cdot q^{1/r'}(a+b)^{r-1} + \sum q^{1/r}b \cdot q^{1/r'}(a+b)^{r-1} \\ &\leqslant \left(\sum qa^r\right)^{1/r}\left(\sum q(a+b)^r\right)^{1/r'} + \left(\sum qb^r\right)^{1/r}\left(\sum q(a+b)^r\right)^{1/r'}.\end{aligned}$$

La igualdad se alcanza sólo si $(qa^r) \sim (q(a+b)^r)$ y $(qb^r) \sim (q(a+b)^r)$, en cuyo caso (a) y (b) serán también proporcionales.

La relación anterior puede también escribirse así:

$$\{M_r(a+b)\}^r \leqslant M_r(a)\{M_r(a+b)\}^{r/r'} + M_r(b)\{M_r(a+b)\}^{r/r'}.$$

Finalmente basta dividir ambos miembros por $\{M_r(a+b)\}^{r/r'}$ para obtener la desigualdad del teorema.

7. Normas y distancias en $\mathbb{R}^n$. En esta sección repasamos algunas definiciones y demostramos un lema que se necesitará en la siguiente sección. Denotamos por $x, y, z, \ldots$ puntos de $\mathbb{R}^n$, es decir, n-uplas de números reales:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots y_n), \quad z = (z_1, \ldots, z_n), \ \ldots$$

con las operaciones vectoriales usuales:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

El símbolo $|x|$ denotará la n-upla $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. Para $r \geqslant 1$ definimos la *norma* r de x por la fórmula:

$$\|x\|_r = \left(\sum |x|^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r\right)^{1/r} = \|\,|x|\,\|_r\,.$$

Por último, el promedio M_r se tomará con todos los pesos q_i iguales a a $1/n$. En particular:

$$M_r(|x|) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}|x_i|^r\right)^{1/r} = n^{-1/r}\,\|x\|_r\,.$$

La norma goza de las siguientes propiedades:

$$\|\lambda x\|_r = |\lambda|\,\|x\|_r \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

$$\|x + y\|_r \leqslant \|x\|_r + \|y\|_r \tag{11}$$

además el hecho evidente que $\|x\|_r = 0$ si y sólo si $x = 0$. La propiedad (11) es consecuencia del teorema 5. En efecto, $M_r(|x+y|) \leqslant M_r(|x| + |y|) \leqslant M_r(|x|) + M_r(|y|)$.

Corolario. *Para que en* (11) *se cumpla la igualdad, debe ser* $|x| \sim |y|$ y $|x+y| = |x| + |y|$.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ equipado con la norma $\|\cdot\|_r$ será designado por $l^r(n)$.

Problema. Probar la fórmula $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \|x\|_r = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

La fórmula justifica la siguiente definición de *norma infinito*: $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$.

La *norma infinito* goza de las mismas propiedades formales de las anteriores. El espacio $\mathbb{R}^n$ equipado con la norma infinito se denota por $l^\infty(n)$.

La *distancia* entre dos puntos x e y de $l^r(n)$ es, por definición, el número

$$\|x-y\|_r == \left(\sum |x-y|^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^r\right)^{1/r} \quad (1 \leqslant r < \infty).$$

Por último, en $l^\infty(n)$ la distancia entre x e y se define por $\|x-y\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$.

Lema. *Sea $1 < r < \infty$. Si x e y son distintos de 0 y $\|x+y\|_r = \|x\|_r + \|y\|_r$, entonces existe un número $\lambda > 0$ tal que $y = \lambda x$.*

En efecto, en la hipótesis del lema existe un número $\lambda > 0$ tal que para todo i, $|y_i| = \lambda |x_i|$ y $|x_i + y_i| = |x_i| + |y_i|$. Elevando al cuadrado ambos miembros de la segunda relación y cancelando todo lo cancelable obtenemos $x_i y_i = |x_i| \cdot |y_i| \geqslant 0$, lo que implica que x_i e y_i deben tener el mismo signo. Tenemos entonces las siguientes posibilidades:

1. Si $x_i = 0$, entonces $y_i = 0 = \lambda x_i$,
2. si $x_i > 0$, entonces $y_i \geqslant 0$ y por consiguiente $y_i = \lambda x_i$,
3. si $x_i < 0$, entonces $y_i \leqslant 0$ y por consiguiente $-y_i = \lambda(-x_i)$

Vemos así que en todos los casos $y_i = \lambda x_i$, lo que concluye la demostración.

8. Segmento afín y segmento métrico. El *segmento afín* S con extremos x e y consta de los puntos z de la forma

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y, \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Por otro lado, con respecto a cada una de las normas de la sección anterior, el *segmento métrico* T_r consta de los puntos z que satisfacen

$$\|x-z\|_r + \|z-y\|_r = \|x-y\|_r \quad (1 \leqslant r \leqslant \infty).$$

Problemas

1. Para cualquier $r \geqslant 1$, $\quad S \subset T_r$
2. Para $1 < r < \infty$, $\quad T_r = S$
3. Muestre mediante ejemplos en $\mathbb{R}^2$ que la afirmación anterior es falsa para $r = 1$ y $r = \infty$.
4. Para $0 < r < 1$ y $t \geqslant 0$, $(1+t)^r < 1 + t^r$, a menos que sea $t = 0$.
5. Si a y b son no negativos y $0 < r < 1$, entonces $(a+b)^r \leqslant a^r + b^r$ con igualdad sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

Los dos últimos problemas permiten introducir una nueva noción de distancia en $\mathbb{R}^n$. Para $0 < r < 1$ definimos

$$d(x,y) = d_r(x,y) = \sum |x-y|^r = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^r.$$

Dejamos al lector la tarea de probar que se cumplen las propiedades características de cualquier noción de distancia:

1. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría),
2. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad triangular),
3. $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Problema. Siendo $0 < r < 1$, describa el segmento métrico con extremos x e y formado por los puntos z que satisfacen $d_r(x,z) + d_r(z,y) = d_r(x,y)$.

Bibliografía

[1] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, (1964).

[2] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inegalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. 30 (1906), 175-193.

[3] A.W. Roberts, D.E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press (1973).

[4] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press (1968),