universidad nacional de cuyo
departamento de investigaciones científicas

revista matemática cuyana

volumen 1
1955
páginas 169-194

instituto de matemática
mendoza
argentina

REVISTA MATEMATICA CUYANA

La REVISTA MATEMÁTICA CUYANA está destinada a la publicación de trabajos originales en los campos de la matemática pura y aplicada, y aparece en forma de fascículos sueltos sin periodicidad fija, anualmente reunidos en un volumen de 250 páginas, aproximadamente.

Castellano, inglés, alemán, francés e italiano, son los idiomas de la Revista.

Los artículos para la Revista deben ser escritos a máquina con doble espacio y enviados a nombre de uno de los miembros del Comité de Redacción, al Instituto de Matemática, Departamento de Investigaciones Científicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

Los colaboradores tienen derecho a 50 tiradas aparte gratis, de sus artículos, y podrán, si lo desean, recibir hasta 150 tiradas aparte a precio de costo.

En todo lo referente a suscripciones, adquisición de números atrasados, etc., dirigirse al Director del Instituto de Matemáticas, Profesor Mischa Cotlar.

Curvas de Darboux sobre las superficies de rotación [1]

Por SERGIO SISPÁNOV

En la presente nota nos ocuparemos en una forma más general y detallada de un tema propuesto en la *Revista de la Unión Matemática Argentina*, por nuestro estimado colega profesor Luis A. Santaló (Volumen IX, número 4, año 1943, página 121, probrema 47).

Se trata de las *curvas* de Darboux sobre las *superficies de rotación*. En este caso el problema puede reducirse a cuadraturas por los métodos casi elementales. Para esto tendremos en cuenta que el centro de la esfera osculatriz de la curva debe hallarse sobre la normal a la superficie en el mismo punto.

Sea $M(x, y, z)$ un punto de la superficie de rotación alrededor del eje OZ y $P(x, y)$ su proyección sobre el plano XOY. Las coordenadas del punto M se expresan por las fórmulas $x = r \cos \varphi$, $y = r$ sen φ, $z = f(r)$ (1), siendo r y φ las coordenadas polares del punto P. La última de las fórmulas representa lá ecuación de la generatriz en el plano XOZ.

En el primer término dejamos a un lado el caso trivial de ser $r =$ const., que corresponde al cilindro recto circular. Se sabe que para las hélices cilíndricas el centro C de la espera osculatriz, coincide con el centro C_0 de curvatura, pero éste último está sobre la normal del cilindro. De manera que las curvas de Darboux en este caso son *hélices* o *circunferencias*.

En el caso general las curvas sobre las superficies de revolución se determinan por sus proyecciones sobre el plano XOY. De suerte que el problema se reduce a la determinación de la dependencia funcional entre las variables r y φ. Como z es una función dada de r, entonces es también función de φ.

[1] Recibido el 1º de enero de 1956. Conferencia dictada por el doctor Sergio Sispánov en el Segundo Congreso Matemático Argentino (Buenos Aires).

Derivando las expresiones (1) encontramos sucesivamente

$$\begin{cases} x' = r' \cos\varphi - r \operatorname{sen}\varphi \\ y' = r' \operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = (r'' - r)\,.\cos\varphi - 2r'.\operatorname{sen}\varphi \\ y'' = (r'' - r)\,.\operatorname{sen}\varphi + 2r'.\cos\varphi \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x''' = (r''' - 3r')\,.\cos\varphi - (3r'' - r)\,.\operatorname{sen}\varphi \\ y''' = (r''' - 3r')\,.\operatorname{sen}\varphi + (3r' - r)\,.\cos\varphi \end{cases}$$

siendo r', r'', r''' derivadas con respecto a φ, y

$$z' = f'r', \quad z'' = f'r'' + f''r'^2, \qquad z''' = f'r''' + 3f''r'r'' + f'''r'^3 \tag{3}$$

en donde f', f'', f''' representan las derivadas de la funcion dada $f(r)$ con respecto a su argumento r.

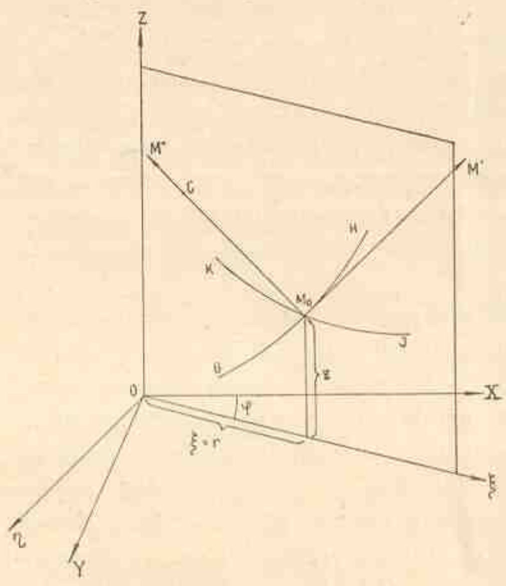

Fig 1

Para simplificar los cálculos giremos el sistema coordenado en un cierto ángulo φ alrededor del eje OZ. Designando por $0\,\xi\eta z$ el nuevo sistema, tenemos evidentemente:

$$< XO\xi = < YO\eta = \varphi$$

En la figura 1, vemos la generatriz GH, cuya ecuación es $z = f(r)$; un punto $M_0\,(\xi = r,\ \eta = 0,\ z)$ situado sobre la misma, y su proyección P_0 $(\xi = r,\ \eta = 0)$.

En el sistema $O\xi\eta z$ los cosenos directores de la normal M_0M'' a la superficie en el punto M_0 serán

$$-\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}; \quad 0 \quad ; \quad \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}. \tag{4}$$

Las derivadas de las coordenadas ξ y η se hallan por las fórmulas (2) haciendo en ellas $\varphi = 0$, lo que nos da

$$\begin{cases} \xi' = r' \\ \eta' = r \end{cases} \quad \begin{cases} \xi'' = r'' - r \\ \eta'' = 2r' \end{cases} \quad \begin{cases} \xi''' = r''' - 3r' \\ \eta''' = 3r'' - r \end{cases} \tag{5}$$

Las relaciones (3) que determinan z', z'', z''' quedan invariables.

Formemos también las expresiones

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= s'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + z'^2 = z'^2 + r'^2 + r^2 \\ c_2 &= s's'' = z'z'' + r'(r'' + r) \end{aligned}\right.$$

en donde s es el arco de la curva buscada JK

Los cosenos directores de la *tangente* M_0T a la curva JK en el sistema $\xi\eta Z$ serán

$$\frac{\xi'}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{\eta'}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{c_1}}$$

o con auxilio de las (5)

$$\frac{r'}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{r}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{c_1}} \tag{6}$$

Los cosenos directores de la *normal* principal M_0N a la misma curva serán

$$\frac{a_1}{\sqrt{c_1 d_1}} \qquad \frac{a_2}{\sqrt{c_1 d_1}}, \qquad \frac{a_0}{\sqrt{c_1 d_1}}$$

en donde los coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= s'^2 z'' - s's''z' = (r'^2 + r^2) \,.\, z'' - r'(r'' + r) \,.\, z' \\ a_1 &= s'^2 \xi'' - s's''\xi' = -\, r' \,.\, z'z'' + (r'' - r) \,.\, z'^2 + r(rr'' - 2r'^2 - r^2) \\ a_2 &= s'^2 \eta'' - s's''\eta' = -\, r \,.\, z'z'' + 2r' \,.\, z'^2 - r'(rr'' - 2r'^2 + r^2) \end{aligned} \tag{7}$$

se encuentran haciendo uso de las (5).

Sin dificultad pueden determinarse también los cosenos directores de la *binormal* M_0B que son iguales a

$$\frac{b_1}{\sqrt{d_1}}, \qquad \frac{b_2}{\sqrt{d_1}}, \qquad \frac{b_0}{\sqrt{d_1}}$$

siendo

$$\left\{\begin{aligned} b_0 &= \xi'\eta'' - \xi''\eta' = -\, rr'' + 2r'^2 + r^2 \\ b_1 &= \eta'z'' - \eta''z' = rz'' - 2r'z' \\ b_2 &= z'\xi'' - z''\xi' = -\, r'z'' + (r'' - r)z' \end{aligned}\right.$$

Si se quiere podrían calcularse, además, los radios de *curvatura* ρ y de *torsión* τ mediante las relaciones

$$\rho = \sqrt{\frac{c_1^3}{d_1}}, \qquad \tau = -\,\frac{d_1}{d}.$$

Las contidades d_1 y d que figuran en las fórmulas anteriores deben ser calculadas previamente por las igualdades.

$$d_1 = b^2{}_0 + b^2{}_1 + b^2{}_2 = (r'^2 + r^2) . z''^2 - 2r'(r'' + r) . z'z'' + \\ +(r''^2 - 2rr'' + 4r'^2 + r^2) . z'^2 + (-rr'' + 2r'^2 + r')^2$$

$$d = b_1\xi''' + b_2\eta''' + b_0 z''' = (-rr'' + 2r'^2 + r^2) . z''' + (r . r''' - \\ - 3r'r'' - 2rr') . z'' + (-2r'r''' + 3r''^2 - 4rr'' + 6r'^2 + r^2) . z'$$

Habiendo obtenido las fórmulas generales relativas a las curvas sobre las *superficies de rotación*, pasemos al estudio de las curvas D.

Sean $C(\xi_0, \eta_0, z_0)$, el centro y R el radio de la esfera osculatriz en un punto $M(\xi, \eta, z)$ de la curva. Considerando ξ, η, z como funciones de φ formemos la expresión

$$\Phi(\varphi) = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (z - z_0)^2$$

La ecuación de la esfera será:

$$\Phi(\varphi) - R^2 = 0$$

Dicha esfera pasa por 4 puntos infinitamente vecinos de la curva y por lo tanto

$$\Phi'(\varphi) = \Phi''(\varphi) = \Phi'''(\varphi) = 0$$

o más detenidamente

$$\begin{cases} (\xi - \xi_0) . \xi' + (\eta - \eta_0) . \eta' + (z - z_0) . z' = 0 \\ (\xi - \xi_0) . \xi'' + (\eta - \eta_0) . \eta'' + (z - z_0) . z'' + c_1 = 0 \\ (\xi - \xi_0) . \xi''' + (\eta - \eta_0) . \eta''' + (z - z_0) . z''' + 3c_2 = 0. \end{cases}$$

Haciendo coincidir M con $M_0(\xi = r;\ \eta = 0;\ z)$ y teniendo en cuenta que el centro C debe hallarse sobre la normal MM'' a la superficie, con auxilio de las (4) transformamos las relaciones obtenidas del siguiente modo

$$\frac{R(f'\xi' - z')}{\sqrt{1 + f'^2}} = 0, \quad \frac{R(f'\xi'' - z'')}{\sqrt{1 + f'^2}} + c_1 = 0; \quad \frac{R(f'\xi''' - z''')}{\sqrt{1 + f'^2}} + 3c_2 = 0.$$

Reemplazando z', z'', z''' por sus expresiones (3) y ξ', ξ'', ξ''' por (5) vemos que la primera de estas igualdades se convierte en una identidad y las demás dos nos dan

$$f_1 . R = c_1\sqrt{1 + f'^2}, \qquad f_2 . R = 3c_2\sqrt{1 + f'^2} \tag{8}$$

de donde

$$f_1 = f''r'^2 + f'r \qquad f_2 = r'(3f''r'' + f'''r'^2 + 3f')$$
$$c_1 = (1 + f'^2)\, r'^2 + r^2 \qquad c_2 = r'\,[(1 + f'^2)\, r'' + ff''r'^2 + r].$$

Comparando entre sí las fórmulas (8) se llega a la relación

$$c_1 f_2 = 3 f_1 c_2.$$

Si las letras c_1, f_1 y c_2, f_2, se reemplazan por sus expresiones y se efectúan las operaciones, entonces, después de simplificar ambos miembros por $r' \neq 0$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$rF \,.\, r'' + F_1 \,.\, r'^4 + F_2 \,.\, r'^2 = 0$$

siendo

$$\begin{cases} F = rf'' - f'(1 + f'^2) \\ F_1 = \dfrac{1}{3}(1 + f'^2) f''' - f'f''^2 \\ F_2 = \dfrac{1}{3} r^2 f''' - (1 + f'^2)(rf'' - f'). \end{cases}$$

Es fácil comprobar que los coeficientes F, F_1, F_2 verifican a las identidades

$$F_2 = \frac{1}{3}\, rF' - F, \qquad rF_1 = (1 + f'^2) \,.\, F' - f'f'' \,.\, F \tag{9}$$

Para integrar la ecuación obtenida se practica el cambio de variable tomando r por argumento y φ por función. De manera que

$$r' = \frac{1}{\varphi'}, \qquad r'' = -\frac{\varphi''}{\varphi'^3} \tag{10}$$

y la ecuación diferencial se convierte en

$$rF \,.\, \varphi'\varphi'' = F_1 + F_2 \,.\, \varphi'^2 \tag{11}$$

en donde las derivadas se toman con respecto a r.

En primer término consideremos el caso excepcional en que

$$F = rf'' - f'(1 + f'^2) = 0.$$

Tomando $z = f(r)$ por función desconocida e integrando resulta

$$r^2 + (z - b)^2 = c^2$$

siendo b y c constante de integracion, o bien

$$z = \text{const.}$$

Se obtiene, pues, una esfera con el centro sobre el eje OZ y su caso particular un plano.

Este caso no ofrece interés, ya que todas las curvas sobre un plano o una esfera son curvas D.

Supongamos ahora que $F \neq 0$, idénticamente. Introduciendo la nueva variable ψ bajo la condición :

$$\varphi'^2 = \frac{\psi}{r^2}$$

se tendrá derivando

$$\varphi'\varphi'' = \frac{\psi'}{2r^2} - \frac{\psi}{r^3}$$

y la ecuación (11) toma la forma

$$F\psi' = \frac{2}{r}(F + F_2) \,.\, \psi + 2rF_1.$$

Si se sustituyen aquí F_2 y rF_1, por sus expresiones (9) se llega a la relación

$$F \,.\, (\psi' + 2f_{\prime}f'') = \frac{2}{3} F' \cdot [\psi + (1 + f'^2)]$$

o separando las variables

$$\frac{\psi' + 2f'f''}{\psi + (1 + f'^2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{F'}{F}.$$

La integración nos da

$$\psi + (1 + f'^2) = k\, F^{2/3}.$$

Volviendo a la variable primitiva φ, encontramos

$$\varphi' = \pm \frac{1}{r} \sqrt{k\, F^{2/3} - (1 + f'^2)} \tag{12}$$

en donde la constante arbitraria k debe ser positiva. Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{1}{r} \sqrt{k\, F^{2/3} - (1 + f'^2)}\, dr \tag{13}$$

siendo

$$F = rf'' - f'(1 + f'^2) \tag{14}$$

y φ_0 otra constante arbitraria

Introduciendo el resultado obtenido en las relaciones (8) hallamos sin dificultad

$$c_1 = \frac{kr^2 F^{2/3}}{kF^{2/3} - (1 + f'^2)}, \qquad f_1 = \frac{r(kf'F^{2/3} + F)}{kF^{2/3} - (1 + f'^2)}$$

y

$$R = \frac{kr\sqrt{1 + f'^2}}{kF^{2/3} - (1 + f'^2)}. \tag{15}$$

Para el punto M_0 ($\xi = r$; $\eta = 0$; z) coordenadas del centro C serán

$$\xi_0 = r - \frac{krf'}{kf' + F^{1/3}}, \qquad \eta = 0, \qquad z_0 = z + \frac{kr}{kf' + F^{1/3}}.$$

Apliquemos la teoría expuesta a un *toro*, o sea a un anillo circular cuya generatriz en el plano $\xi\, OZ$ se da por la ecuación

$$(r - a)^2 + (z - b)^2 - c^2.$$

Despejando z, vamos a tener

$$z = f(r) = b \mp \sqrt{c^2 - (r - a)^2}$$

o derivando

$$f'(r) = \pm \frac{r - a}{\sqrt{c^2 - (r - a)^2}}.$$

Luego por las fórmulas (14), (15) y (13) calculamos

$$F = \pm \frac{ac^2}{[c^2 - (r - a)^2]^{3/2}}, \qquad R = \frac{kc^2}{k(r - a) + \sqrt[3]{ac^2}}$$

y

$$\varphi = \varphi_0 \mp \int \frac{\sqrt{k(ac^2)^{2/3} - c^2}}{r\sqrt{c^2 - (r - a)^2}}\, dr.$$

Para que el numerador de la función subintegral sea real debe cumplirse con la condición

$$k \geqq \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3}.$$

Supongamos, primero, que en esta desigualdad tenga lugar el signo $>$.

Integrando e invirtiendo los resultados llegamos a tres casos:

1° Si $a > c$, entonces

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a \pm c \operatorname{sen} l(\varphi - \varphi_0)}.$$

siendo

$$l = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{k(ac^2)^{2/3} - c^2}}$$

El radio r alcanza a sus valores extremos $r = a \mp c$, cuando $\varphi = \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2l}$. La curva D. tiene forma *helicoidal* y su proyección sobre el plano $\xi\, 0\, \eta$ es una curva *periódica* de período $\frac{2\pi}{l}$.

2° Si $a < c$, entonces

$$r = \frac{c^2 - a^2}{c\, Ch\, l(\varphi - \varphi_0) - a}$$

siendo

$$l = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{k(ac^2)^{2/3} - c^2}}.$$

El radio r alcanza a su máximo $r = a + c$, cuando $\varphi = \varphi_0$. Para $\varphi = \infty$ resulta $r = 0$. La curva D y su proyección tienen la forma de *espirales*.

3° Si $a = c$, entonces

$$r = \frac{2a}{1 + l(\varphi - \varphi_0)^2}$$

siendo

$$l = \frac{1}{k - 1}, \qquad k > 1.$$

La curva D y su proyección son *espirales*.

En el caso límite de ser $k = \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3}$ el numerador de la función subintegral se anula y por lo tanto $\varphi = \varphi_0$.

De manera que las curvas D coinciden con los meridianos que son al mismo tiempo generatrices del toro.

Pasemos al estudio de las curvas *geodésicas*: Para las curvas de esta especie la normal principal M_0N de la curva coincide con la normal M_0M'' de la superficie y como esta es perpendicular al eje $O\eta$ entonces, conforme a la tercera de las relaciones (7) se obtiene

$$a = - r \,.\, z'z'' + 2r' \,.\, z'^2 - r'(rr' - 2r'^2 - r^2) = 0.$$

Introduciendo aquí las expresiones (3) y simplificando por r' resulta

$$r(1 + f'^2) \,.\, r'' + [rf'f'' - 2(1 + f'^2)] \,.\, r'^2 - r^2 = 0$$

Tomando r por argumento y φ por función, con auxilio de las igualdades (10) llegamos a una ecuación diferencial que después de ser multiplicada por el factor integrante $\frac{2}{r^5}$ toma la forma

$$\left(2 \,.\, \frac{f'f''}{r^4} - 4 \,.\, \frac{1 + f'^2}{r^5}\right) \,.\, \frac{1}{\varphi'^2} - 2\,\frac{1 + f'^2}{r^4}\;\frac{\varphi''}{\varphi'^3} - \frac{2}{r^3} = 0.$$

Integrando ambos miembros, se tendrá

$$\frac{1 + f'^2}{r^4\varphi'^2} + \frac{1}{r^2} = k.$$

Despejando φ', resulta

$$\varphi' = \pm \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1 + f'^2}{kr^2 - 1}} \tag{16}$$

en donde la constante de integración k verifica a la desigualdad $k > 0$.

Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{1}{r}\sqrt{\frac{1 + f'^2}{kr^2 - 1}}\;dr.$$

Consideramos ahora las curvas *helicoidales* que se caracterizan por la condición $\rho/\tau = \text{const.}$

Tormando OZ por el eje de la hélice y recordando que la normal principal M_0N es perpendicular a dicho eje, en virtud de la primera relación (7) tendremos

$$a_0 = (r'^2 + r^2)\,z'' - r'(r'' + r) \,.\, z' = 0$$

Haciendo uso de las igualdades (3), hallamos

$$r^2f'r'' + f'' \,.\, r'^4 + r(rf'' - f')\,r'^2 = 0.$$

Si, como antes, r se toma por argumento y φ por función, entonces hallamos haciendo uso de las expresiones (10)

$$r^2 f' . \varphi'' = r(rf'' - f') . \varphi' + \frac{f''}{\varphi'}$$

lo que es la ecuación de Bernoulli con respecto a φ'. Su integración nos da

$$\varphi' = \frac{1}{r}\sqrt{kf'^2 - 1} \qquad (17)$$

siendo k una constante que debe ser positiva.

Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{1}{r}\sqrt{kf'^2 - 1}.$$

Ocupémonos también de las curvas *loxodrómicas* que cortan los meridianos de la superficie de rotación bajo un cierto ángulo constante α. Los cosenos directores de la tangente M_0M' al meridiano GH son

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}; \quad 0 \quad ; \quad \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Los cosenos directores de la tangente M_0T a la curva buscada se dan por las fórmulas (6).

Recordando la expresión para el coseno del ángulo entre dos rectas, sin dificultad encontramos

$$\cos \alpha = \frac{r' + f'z'}{\sqrt{c_1} . \sqrt{1 + f'^2}}$$

Reemplazando aquí c_1 por $z'^2 + r'^2 + r^2$ y z', a su vez, por $f'r'$ vamos a tener

$$\frac{r'(1 + f'^2)}{\sqrt{1 + f'^2} . \sqrt{(1 + f'^2) . r'^2 + r^2}} = \cos \alpha$$

de donde

$$\pm \frac{r}{r'\sqrt{1 + f'^2}} = \operatorname{tng} \alpha = k$$

siendo k constante.

Teniendo en cuenta que

$$r' = \frac{1}{\varphi'}$$

hallamos

$$\varphi' = \pm \frac{k}{r} \sqrt{1 + f'^2}. \tag{18}$$

Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm k \int \frac{1}{r} \sqrt{1 + f'^2}\, dr$$

En conclusión apliquemos los resultados obtenidos para demostrar algunas proposiciones de la teoría de superficies. Procuremos por ejemplo, encontrar las *superficies de rotación* cuyas curvas D son *hélices*. Para esto igualemos las expresiones (12) y (17), lo que nos conduce a la relación

$$\pm \frac{1}{r} \sqrt{k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2)} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{k_2 f'^2 - 1}$$

en que k_1 y k_2 son dos constantes.

Elevando al cuadrado y simplificando, hallamos sucesivamente

$$k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2) = k_2 f'^2 - 1,$$

$$F = \pm \left(\frac{k_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} \cdot f'^3, \qquad r f'' = f'(1 + f'^2) \pm \left(\frac{k_2 + 1}{k_1}\right)^{2/3} f'^3.$$

Recordando que la función $f(r)$ que actualmente se busca, fué designada por la letra z y haciendo

$$q = 1 \pm \left(\frac{k_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2}$$

llegamos a la ecuación diferencial

$$r z'' = z' + q z'^3$$

cuya integral general es

$$r^2 = 2p \,.\, (z - z_0) - q\,(z - z_0)^2$$

en donde p y z_0 son constante de integración.

Queda pues, demostrado el teorema de Blaschke según el cual la coincidencia de las curvas D. con las *helicoidales* tiene lugar solamente para las *superficies de rotación* cuyas generatrices son *secciones cónicas*.

Consideremos otro ejemplo. Vamos a ver si pueden las curvas D convertirse en las *laxodrómicas*. Igualando (12) a (18) se obtiene

$$\pm \frac{1}{r} \sqrt{k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2)} = \pm \frac{k_2}{r} \sqrt{1 + f'^2}$$

de donde deducimos sucesivamente

$$k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2) = k^2{}_2 (1 + f'^2), \qquad F = \pm \left(\frac{k^2{}_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} \cdot (1 + f'^2)^{3/2}$$

$$rf'' = (1 + f'^2) \cdot \left[f' \pm \left(\frac{k^2{}_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{1 + f'^2} \right].$$

Haciendo

$$f(r) = z \qquad \text{y} \qquad \pm \left(\frac{k^2{}_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} = \frac{1}{k}$$

representamos la ecuación diferencial obtenida bajo la forma

$$rz'' = (1 + z'^2) \cdot \left(z' + \frac{1}{k} \sqrt{1 + z'^2} \right).$$

Su integral general es

$$(z - a)^2 + (r - b)^2 = (kb)^2,$$

siendo a y b constantes arbitrarias.

De esta manera está demostrado el teorema de Santaló que dice que la *superficie de rotación* con las curvas D idénticas a las *laxodrómicas* son ineludiblemente el *toro* y sus degeneraciones : el *cono* y el *cilindro*, así como la esfera y el plano.

San Juan 16 de diciembre de 1949.

Topologies minimales dans les espaces vectoriels topologiques [1]

PAR R. RICABARRA ET E. H. ZARANTONELLO

1. Introduction. La topologie du produit cartesien ordinaire dans l'espace vectoriel R^I (produit de droites) est une topologie *minimale*, dans le sens suivant : si τ est une topologie separée dans R^I compatible avec les opérations algébriques, localement convexe (il existe une base de voisinages de 0 formée par des ensembles convexes) et moins fine que la topologie du produit cartesien, alors elle est identique à cette topologie. En plus, cette proprieté caracterise la topologie du produit cartesien [2, XVIII, page 61].

L'object de cette note est de montrer que cette proprieté subsiste en une forme un peu plus forte, savoir, que la minimalité est verifiée dans la famille de toutes les topologies separées, localement convexes ou non, compatibles avec la structure algebrique de R^I.

Nous énnonçons les résultats pour des espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres réels ou complexes, bien que quelqu'uns d'entre eux sont valides pour des domaines des scalaires plus généraux.

2. Quelques propositions auxiliaires. Les propositions suivantes sont bien connues, ou bien elles sont faciles à démontrer. On peut trouver des généralizations à d'autres domaines des scalaires dans L. Nachbin [1, spécialement Théorèmes 6 et 7], et dans Bourbaki [2], ou, bien on peut les démontrer par une généralization convenable de la notion de convexité. Notre terminologie est celle du fascicule cité de Bourbaki.

a) *Soit X un espace vectoriel topologique separé a dimension finie sur le corps* K *des nombres réels ou complexes. Alors, toute forme linéaire sur X est continue.*

b) *Soit K_n^n l'espace vectoriel topologique somme directe topologique de n fois le corps* K, *et soit W un emsemble convexe et équilibré* ($|\lambda|<1$,

[1] Reçu le 20 octobre, 1955.

entraine $\lambda W \subset W$). *Si* W *est absorbant* (*pour tout* $x \in K^n_n$ *il y a un* $\lambda > 0$ *tel que* $\lambda x \in W$), *alors* W *a un intérieur non-vide.*

c) *Si* W *est un ensemble convexe, équilibré à intérieur non-vide dans un espace vectoriel topologique* X *sur* K, *alors l'origine d'*X *est un point intérieur de* W.

d) *Si* W *est un ensemble convexe et équilibré dans un espace vectoriel topologique* X *sur* K, *alors* W *contient un plus grande sous-espace vectoriel* M; *si* W *est en plus fermé, alors* M *est aussi fermé et* $M + W = W$.

3. **Topologies localement convexes minimales.** Soient E, E' deux espaces vectoriels en dualité séparée (x, x'). Cet à dire (x, x') est, pour x' ou x fixe, une forme linéaire sur E ou E' respectivement qui s'annule identiquement si et seulement si $x' = 0$ ou $x = 0$.

Définition. *On appelle topologie faible de la dualité sur* E, *indiquée* $\sigma(E, E')$, *a la moins fine des topologies sur* E *compatibles avec les opérations algébriques d'espace vectoriel pour les quelles les fonctions* $x \to (x, x')$ *sont continues pour tout* $x' \in E'$.

Comme on sait $\sigma(E, E')$ est une topologie séparée localement convexe. Si $F' \subset E'$ est un sous-espace vectoriel de E', on définie $\sigma(E, F')$ d'une façon tout à fait pareille. Cette topologie n'est séparée que si F' est total, cet à dire, que si $(x, x') = 0$ pour tout $x' \in F'$ entraine $x = 0$.

Théorème 1. *Soit* τ *une topologie sur* E *compatible avec la structure d'espace vectoriel, séparée et moins fine que* $\sigma(E, E')$. *Alors, il existe un sous-espace vectoriel total* $F' \subset E'$ *tel que* $\tau = \sigma(E, F')$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} = \{U\}$ la famille de tous les voisinages faibles (de la topologie $\sigma(E, E')$) de l'origine qui sont a la fois convexes, équilibrés et fermés pour la topologie τ donnée. $\mathfrak{U}$ est une base du filtre des voisinages de 0 pour une topologie τ_1 sur E comtible avec la structure d'espace vectoriel de E. Pour chaque $U \in \mathfrak{U}$ nous appellons E_U le sous-espace vectoriel maximal contenu dans U (§ 2, *d*); E_U est à codimension finie et il est fermé pour la topologie τ, et par suite, pour $\sigma(E, E')$.

Désignons $E'_U = (E_U)^0$ le polaire de E_U dans E' (varieté « orthogonale » par la relation (x, x')). Etant donnés U_1, $U_2 \in \mathfrak{U}$, on vérifie sans peine que

$$U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}, \qquad E'_{U_1 \cap U_2} = E'_{U_1} + E'_{U_2},$$

donc, si on met

$$F'' = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} E'_U,$$

F'' est un sous-espace vectoriel de F' que, nous disons, vérifie la thèse du Théorème. Pour le voir, nous allons considérer les trois étapes suivantes :

(i) $\sigma(E, F'')$ *est moins fine que* τ. En d'autres termes, si $x' \varepsilon F''$, la forme linéaire sur E, $x \to (x, x')$, est continue par rapport a τ. Soit $U \varepsilon \mathfrak{U}$ tel que $x' \varepsilon E'_U$ et soit φ l'application canonique de E sur E/E_U. Alors, il existe une forme linéaire sur E/E_U soit l, telle que

$$[l \circ \varphi](x) = (x, x'). \tag{1}$$

Si nous considérons E muni de la topologie τ, puisque E_U est fermé dans la topologie τ et à codimension finie, l'espace quotient E/E_U est un espace vectoriel topologique separé à dimension finie, et φ est une fonction continue. Donc, du § 2, *a*), on obtient que l est une fonction continue, et d'après la formule (1), que la forme (x, x') est elle même continue.

(*ii*) τ *est moins fine que* τ_1. Soit W un voisinage de O qu'on peut supposer fermé, de la topologie τ. D'aprés l'hypothèse il y a un voisinage de O pour la topologie $\sigma(E, E')$, convexe et équilibré, contenu dans W. Son adhérence par rapport à τ est encore contenue dans W et appartient à $\mathfrak{U}$.

(*iii*) τ_1 *est moins fine que* $\sigma(F, F'')$. Soit U un voisinage de O de la topologie τ_1. On peut supposer que $U \varepsilon \mathfrak{U}$. Puisque $E_U + U = U$ (§ 2, *d*)), il en résulte que U est l'image inverse, par l'application canonique φ de E sur E/E_U, de l'ensemble $\varphi(U)$. Comme φ est continue dans la topologie $\sigma(E, F'')$, il suffira de demontrer que $\varphi(U)$ est un voisinage de O dans E/E_U, car, dans un tel cas, U sera un voisinage de O pour $\sigma(E, F'')$. Mais $\varphi(U)$ est convexe et absorbant dans E/E_U, donc, d'apres § 2, *b*), $\varphi(U)$ est effectivement un voisinage de O dans E/E_U.

Ca achève la démonstration du Théoréme 1.

COROLLAIRE 1. *Si E, E' sont en dualité (x, x'), non nécessairement séparée, toute topologie τ sur E compatible avec les opérations algebriques et moins fine que $\sigma(E, E')$ coïncide avec $\sigma(E, F'')$, pour un sous-espace vectoriel convenable $F'' \subset E'$.*

DÉMONSTRATION : On la reduit au cas antérieur en prenant comme nouveau E_1 l'espace quotient E/N, où N est l'adhérence de O dans la topologie τ, et comme nouveau E'_1, a N°.

DÉFINITION. *On dit qu'une topologie séparée τ définie sur E et compatible avec la structure d'space vectoriel est minimale si toute autre topologie du même type moins fine que τ coïncide avec τ.*

COROLLAIRE 2. *Soient E, E' en dualité séparée (x, x'). Alors pour que la topologie $\sigma(E, E')$ soit minimale il faut et il suffit que E' n'ait pas des sous-espaces totales propres, cet à dire, il faut et il suffit que tout sous-espace vectoriel de E' à codimension 1 ne soit pas total. Autrement dit, il faut et il suffit que toute forme linéaire sur E' soit représentée par $x' \to (x, x')$, pour un certain $x \varepsilon E$.*

DÉMONSTRATION : Pour un sous-espace à codimension 1 la proprieté de n'être pas total est équivalente à celle d'être fermé dans la topologie $\sigma(E', E)$. D'ailleurs, elle est bien connue la relation entre les formes linéaires et les sous-espaces à codimension 1 (voir par example Bourbaki [**2**, XV, page 26]).

Nous somes maintenant en conditions d'ennonçer le résultat principal de cette note :

THÉORÈME 2. *Soit τ une topologie séparée localement convexe sur un espace vectoriel E. Pour que τ soit minimale il faut et il suffit que E topologisé par τ soit isomorphe a un produit cartesien K^I_S. En particulier, un espace E topologisé par une topologie minimale est complet ; il est métrisable si et seulement si I est dénombrable.*

DÉMONSTRATION : Si E' est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, il en resulte d'abord que si la topologie donnée est minimale elle doit coïncider avec $\sigma(E, E')$; en plus, d'après le Corollaire 2, il est évident que E doit etre isomorphe à l'espace vectoriel de toutes les fonctions à valeurs dans K definies sur un sous-ensemble quelconque de E' qui soit algebriquement libre et maximal (base de Hamel de E'), avec la convergence simple.

COROLLAIRE. *Pour qu'un espace vectoriel E topologisé par une topologie faible $\sigma(E, E')$ séparée soit complet il faut et il suffit que $\sigma(E, E')$ soit minimale. Par suite, tout espace vectoriel E avec une topologie faible séparée $\sigma(E, E')$ est dense dans un espace K^I_S.*

Démonstration : Si E est complet il doit contenir les limites des filtres de Cauchy ; en particulier, si une forme linéare $l(x')$ définie sur E' est telle que pour tout sous-space $F' \subset E'$ à dimension finie il existe $x_{F'}$ tel que

$$(x_{F'}, x') = l(x'), \qquad \text{pour} \qquad x' \varepsilon F',$$

alors il doit exister un $x \varepsilon E$ tel que $(x, x') = l(x')$ pour tout $x' \varepsilon E'$. Il est maintenant facile à voir que cette condition est vérifiée pour toute forme linéaire $l(x')$, donc la thèse [1].

Pour en finir nous voulons remarquer que nous ne savont pas si dans l'énnoncé du Théorème 2 on peut ôter la condition d'être E localement convexe. Un problème intéressant dans cet ordre d'idées, et que nous n'avons pas réussi à résoudre, est celui de décider si la topologie de la convergence en probabilité sur l'espace des fonctions mesurables dans l'intervalle [0,1] est minimale ou non. Cette difficulté naît de notre ignorance sur la structure des espaces vectoriels topologiques non localement convexes.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Nachbin, *On strictly minimal topological division rings*, Bull. Am. Math. Soc., 55 (1949), 1128-1136.
2. N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique XV, XVIII. Espaces vectoriels topologiques*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann & Cie., París, 1953, 1955.
3. G. Köthe, *Eine axiomatische Kennzeichnung der lineare Räume von Typus ω*, Math. Ann., 120 (1949), 634-649.
4. S. Kaplan, *Cartesian products of reals*, Am. Journ. of Math., 14 (1952), 936-954.

Instituto de Matemática
Departamento de Investigaciones Científicas
Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza.

[1] Voir aussi [3] et [4], où l'on trouve une autre caractérisation de l'espace $K_\aleph^1$ par la completicité de la topologie faible.

Les ensembles ordonnés compacts

Par A. A. Monteiro *

1. Introduction. Nous allons indiquer, dans cette note, une généralisation d'un théorème démontré par J. W. Alexander [1], d'après lequel : *« pour qu'un espace topologique soit compact il faut et il suffit qu'il existe une sous-base d'ensembles fermés qui soit compacte ».*

Une démonstration très élégante de ce théorème a été indiquée par O. Frink [2], dans le cas particulier des espaces T_1.

Dans une note qui n'est pas encore parue [1], nous avons indiqué une généralisation du théorème d'Alexander pour les réticulés distributifs contenant un premier élément. Cette fois -ci nous allons le démontrer dans le cas plus général des *ensembves ordonnes semi-orthogonaux,* dont la définition est indiquée plus loin (Definition 6).

Les ensembles ordonnés semi-orthogonaux qui sont réticulés supérieurement (c.a.d. où chaque couple d'éléments a une borne supérieure) sont identiques aux *ensembles striables* de P. Jaffard [3], qui ont, d'après cet auteur; *« une valeur se structure « universelle », ce qui éclaire l'avantage de leur introduction dans l'étude des idéaux d'un anneau et également dans celle des groupes abéliens ordonnés ».*

Le théorème de Tychonoff [4], d'après lequel le produit d'espaces compacts est un espace compact, étant une conséquence immédiate du théorème d'Alexander, nous voyons, par cela même, que la notion de semi-orthogonalité, se ratâche directement à une question importante de topologie générale.

Dans une autre note, nous montrerons que des ensembles ordonnés semi-orthogonaux, que ne sont pas striables, se présentent d'une façon naturalle dans l'étude des bases fermés des espaces compacts.

* Reçu le 16 Sept., 1955.

[1] *Propiedades caracteristicas de los filtros de un algebra de Boole.* Acta Cuyana de Ingenieria Volumen 1 (1953).

2. **Les ensembles ordonnés compacts.** Soit E un ensemble ordonné, c'est-à-dire : un ensemble sur lequel est definie une relation binaire $\leq$, qui vérifie les propriétés suivantes : 01) $a \leq a$, quel que soit a de E ; 02) Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$; 03) Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

Nous allons supposer, dans cette note, que E contient un premier élément, c'est-à-dire un élément 0 tel que : $0 \leq x$, quel soit x de E. Pour rappeler cette hypothèse nous representerons E par E_0.

Étant donnée une partie, non vide, $X = \{x_i\}$, de E, nous dirons que *x est la borne inférieure des élément x_i*, si les conditions suivantes son verifiées : 11) $x \leq x_i$, quel que soit l'indice i ; 12) si z de E_0 est tel que $z \leq x_i$, quel que soit i, alors $z \leq x$; et nous écrirons :

$$x = \bigwedge x_i$$

Nous dirons aussi que x est la borne inférieure de la partie X. La borne inférieure des élements a et b sera représentée par la notation $a \wedge b$. Dans ces conditions si dans E_0 nous avons $a \wedge b = 0$, cela signifie que : si $z \leq a$ et $z \leq b$ alors $z = 0$.

D'une façcon duale on définit la *borne supérieure* des éléments x_i

$$x = \bigvee x_i$$

Si chaque couple d'éléments de E_0 a une borne supérieure nous dirons que E_0 est *réticulé supérieurement.*

Nous dirons qu'une partie, non vide, $X = \{x_i\}$ d'éléments de E_0 a un *centre*, s'il existe un élément $c \neq 0$ tel que $c \leq x_i$, quel que soit l'indice i, et alors c sera dit un *centre* de X.

DÉFINITION 1. *Une partie, non vide,* C *de l'ensemble* E_0 *sera dite compatible, si toutes les parties finies, non vides, de* C *ont un centre.*

DÉFINITION 2. *L'ensemble ordonné* E_0 *sera dit compact si chaque partie compatible de* E_0 *a un centre.*

La famille de toutes les parties compatibles de E_0 ordonnée par la rélation d'inclusion, est inductive supérieurement, donc, d'après le théorème de Zorn [5], chaque partie compatible est contenue dans une partie compatible maximale.

Pour qu'une partie compatible U soit maximale if faut et suffit que si x est un élément de E_0 que n'appartient pas à U il existe une partie finie, non vide, de U, soit $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ telle que

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n \wedge x = 0$$

Remarquons que si la partie compatible C_1 contient la parte compatible C et si C_1 a un centre c, alors c est aussi un centre de C. Dans ces conditions pour que E_0 soit compact il faut et il suffit que les parties compatibles maximales de E_0 aient un centre.

Déterminons la forme des parties compatibles maximales U, qui ont un centre. Pour cela rappelons qu'on donne le nom de *point* (ou *atome*) de E_0, à tout élément p de E_0 que vérifie les deux conditions suivantes :

$$P1) \quad p \neq 0 ; \qquad P2) \quad si\ x \leq p\ alors : x = 0\ \ ou\ \ x = p.$$

Soit p un centre d'une partie compatible maximale U, nous allons montrer que p est un point. La condition $P1)$ est vérifiée d'après la définition même de centre. D'autre part p doit appartenir à U car autrement la partie de E_0 formée par p et U serait compatible et contiendrait U comme partie propre, ce qui est impossible car U est une partie compatible maximale. Cela étant, soit $x \neq 0$ un élément tel que $x \leq p$, alors x étant un centre de U, nous pouvons afirmer que x appartient à U et alors $p \leq x$ et par conséquent $p = x$. Cela montre bien que p est un point. En particulier une partie compatible maximale ne peut avoir qu'un seul centre.

Montrons maintenant que si U est une partie compatible maximale ayant pour centre l'atome p et si x est un élément tel que $p \leq x$ alors x appartient à U. Dans le cas contraire l'ensemble formé par U et x serait compatible et contiendrait U comme partie propre, ce qui est impossible

Nous venons donc de montrer que : *si la partie compatible maximale* U *a un centre* p, *ce centre est un point et* U *est formée par la famille de tous les éléments* x *de* E_0 *tels que* $p \leq x$.

Réciproquement : *si* p *est un point de* E_0 *la famille* U (p) *de tous les éléments* x *de* E_0 *tels que* $p \leq x$ *est une partie compatible maximale de* E_0. Il est évident que $U(p)$ est une partie compatible de E_0. Pour montrer que $U(p)$ est une partie compatible maximale soit x un élément de E_0 n'appartenant pas à $U(p)$, c.a.d. tel que la condition $p \leq x$ ne soit pas vérifiée. Comme p est un atome nous pouvons afirmer que $p \wedge x = 0$. Ainsi pour chaque élément que x n'appartient par à $U(p)$ il existe un élément p de $U(p)$ incompatible avec x et cela montre bien que $U(p)$ est une partie compatible maximale.

Dans ces conditions pour que E_0 soit compact il faut et il suffit que toutes les parties compatibles maximales soient de la forme $U(p)$, ou p est un point de E_0.

Nous allons maintenant définir la notion de compacité d'une partie P de l'ensemble ordonné E_0

DÉFINITION 3. *Nous dirons qu'une partie, non vide,* P *de* E_0, *est compacte si chaque partie compatible de* P *a un centre* (*dans* E_0).

Nous cherchons dans cette note à demontrer la compacité de E_0 à partir de la compacité de certaines parties spéciales de E_0.

3. **Bases d'un ensemble ordonné compact.** Nous allons voir que le problème que nous avons indiqué a une solution simple, dans le cas où une partie B de E_0 est une base de E_0 d'après la définition suivante :

DÉFINITION 4. *Nous dirons qu'une partie* B (*non vide*) *d'un ensemble ordonné* E_0 *est une base de* E_0 *si tout élément* x *de* E_0 *est la borne inférieure d'une partie, non vide, de l'ensemble* B.

D'après cette définition E_0 est une base de E_0, car tout élément x de E_0 peut s'écrire sous la forma $x = x \wedge x$

LEMME 1. *Si* B *est une base d'un ensemble ordonné* E_0, *pour que* E_0 *soit compact il faut et il suffit que* B *soit une partie compacte de* E_0.

DÉM. Il est évident que la condition est nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante supposons qu'une base B de l'ensemble ordonné E_0 soit une partie compacte de E_0 (Définition 3). Pour démontrer que E_0 est compact soit C une partie compatible de E_0. Chaque élément c de C est la borne inférieure d'une famille, non vide, $\{b_i^{(c)}\}$ d'éléments de B, c'est-à-dire :

$$c = \bigwedge_i b_i^{(c)} \tag{1}$$

Soit $B(C)$ la famille de tous les éléments $b_i^{(c)}$, où c varie sur C. Montrons que B(C) est una partie compatible de E_0. Pour cella soit F une partie finie (non vide) de $B(C)$:

$$F = \{b_{i_1}^{(c_1)}, \ldots, b_{i_n}^{(c_n)}\}$$

Nous aurons :

$$c_j \leq b_{i_j}^{(c_j)}, \text{ por } \; j = 1, 2, ..., n$$

où les $c_j (j = 1, 2, ..., n)$ sont des éléments de C. Comme C est une partie compatible de E_0, les éléments de C : $c_1, ..., c_n$ ont un centre, c'est-à-dire il existe un élément $x \neq 0$ tel que :

$$x \leq c_j, \quad \text{pour } j = 1, ..., n$$

donc

$$0 < x \leq b_{i_j}^{(c_j)}, \text{ pour } j = 1, ..., n$$

Nous voyons ainsi que les parties finies F de $B(C)$ ont un centre, c'est-à-dire : $B(C)$ est compatible et comme $B(C)$ est una partie non vide de B elle aura un centre. Il existe donc un élément $w \neq 0$ tel que :

$$w \leq b_i^{(c)}, \quad \text{pour tous les } b_i^{(c)} \quad \text{de } B(C) \tag{2}$$

Des conditions (1) et (2) on déduit que $w \leq c$, quel que soit l'élément c de C. Nous venons donc de montrer que toute partie compatible C de E_0 a un centre w et par conséquant E_0 est compact, ce qu'il fallait démontrer.

4. **Sous-bases d'un ensemble ordonne compact.** Nous allons maintenant indiquer la définition de sous-base d'un ensemble ordonné.

Définition 5. *Nous dirons qu'un partie, non vide,* S *d'un ensemble ordonné* E_0 *est une sous-base de* E_0 *s'il existe une base* B *de* E_0 *telle que chaque élément* b *de* B *est la borne superieure d'une partie finie, non vide, de* S.

Si E_0 est réticulé supérieurement nous pouvons dire que S, *est une sous-base de* E_0 si la famille B de toutes les bornes superieures des parties finies, non vides, de S forment une base de E_0. Si E_0est compact toute sous-base de E_0 est évidemment une partie compacte de E_0. Pour démontrer la réciproque nous allons supposer que la rélation d'ordre vérifie la proprieté indiquée dans la définition suivante :

Définition 6. *Nous dirons qu'un ensemble ordonné* E_0 *est semi-orthogonal si étant donnés trois éléments* a, b_1, b_2, *de* E_0 *tels que 1°)* $\mathrm{a} \neq 0$, *2°)* $\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}_1 = \mathrm{a} \wedge \mathrm{b}_2 = 0$, *il existe un element* x *de* E_0 *tel que :* $\mathrm{a} \wedge \mathrm{x} = 0$; $\mathrm{b}_1 \leq \mathrm{x}$; $\mathrm{b}_2 \leq \mathrm{x}$.

Si E_0 est réticulé supérieurement la semi-orthogonalité de E_0 s'exprime plus simplesment sous la forma suivante: si $a \wedge b_1 = 0$ et $a_2 \wedge b = 0$ alors $a \wedge (b_1 \vee b_2) = 0$ et nous aurons á faire á un ensemble *striable*, dans la terminologie de M. P. Jaffard [3]. Tout réticulé distributif, ayant un premier élément, est évidemment striable. Dans une étude sur les bases des spaces T_1 compacts nous avons eu besoin de considérer des ensembles semi-orthogonaux que ne sont pas striables.

Les parties compatibles maximales des ensembles ordonnés semi-orthogonaux ont une propriété importante que nos allons maintenant indiquer.

Définition 7. *Une partie* P *d'un ensemble ordonné* E_0 *será dite primitive si lorsqu'un élément* p *de* P *est de la forme* $p = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$, *alors un au moins des élements* a_i *appartient a* P.

Démontrons maintenant que

Lemme 2. *Toute partie campatible maximale* U *d'un ensemble ordonné semi-orthogonal* E_0 *est primitive.*

Dém. Soit $u = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$ un élément de U et supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n'appartienent pas a U. Alors pour chaque $a_i (i=1, 2, \ldots, n)$ il existe un nombre fini d'éléments de U; $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots, u_{n_i}^{(i)}$ tels que:

$$u_1^{(i)} \wedge u_2^{(i)} \wedge \ldots \wedge u_{n_i}^{(i)} \wedge a_i = 0 \qquad (i)$$

La partie finie X de U formée par les éléments $u_j^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$ et par l'élément u a un centre z, c'est-à-dire il existe un élément z de E_0 tel que:

$$z \neq 0 \qquad (1)$$

$$z \leq u_j^{(i)}, \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j, \qquad (2)$$

$$z \leq u \qquad (3)$$

De (i) et (2) on déduit

$$z \wedge a_i = o, \text{ quel que soit } i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4)$$

En tenant compte de la semi-orthogonalité de E_0 on déduit de (1) et (4) l'existence d'un élément x tel que :

$$z \wedge x = 0 \tag{5}$$

$$a_i \leq x, \text{ quel que soit } i. \tag{6}$$

De (6) on déduit que

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n = u \leq x. \tag{7}$$

De (3) et (7) on déduit que $z \leq x$ donc $z = z \wedge x$, donc d'après (5) $z = 0$, ce qui est en contradiction avec (1) et le lemme est démontré.

Nous pouvons finalement démontrer le théoreme suivant :

Théorème 2. *Pour qu'un ensemble ordonné semi-orthogonal* E_0 *soit compact il faut et il suffit qu'il existe une sous-base de* E_0 *qui soit compacte.*

Dém. La condition est évidemment nécessaire car E_0 est une sous-base de E_0. Pour démontrer qu'elle est suffisante soit S une sous-base compacte de E_0 et B la base de E_0 indiquée dans la Définition 5. Pour démontrer que E_0 est compacte. il suffit de démontrer, d'après le Lemme 1, que B est compacte. Pour cela nous avons à démontrer que toute partie compatible C de B a un centre. La partie compatible C est contenue dans una partie U de E_0, compatible et maximale. Soit $B(U)$ la famille de tous les éléments de B appartenant à U: il est évident que C est una partie de $B(U)$, donc si nous démontrons que $B(U)$ a un centre il en sera de même pour C. Soit b un élément de $B(U)$; comme b appartient à B, nous aurons $b = s_1 \vee s_2 \vee \ldots \vee s_n$ où les s_i sont des éléments de S. D'après le Lemme 2, nous pouvons affirmer qu'un au moins des éléments s_i appartient à U. Dans ces conditions pour chaque élément b de $B(U)$ il existe un élément s de S, appartenant à U tel que $s \leq b$. Soit $S(U)$ la famille de tous les éléments de S qui appartiennet a U. Comme $S(U)$ est une partie compatible de S, $S(U)$ a un centre, c'est-à-dire il existe un élément $c \neq 0$ tel que $c \leq s$ quel que soit s de $S(U)$. Montrons que c est aussi un centre de $B(U)$. Pour chaque b de $B(U)$ il existe un s de $S(U)$ tel que $s \leq b$, donc $c \leq b$, quel que soit b de $B(U)$ et la démonstration est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. W. ALEXANDER, *Ordered Sets, Complexes and the Problem of Bicompactification*. Proc. Nat. Acad. of Sciences. Vol. 25 (1939), pág. 296-298.

[2] O. FRINK, *Topology in lattices*. Transacions of the Amer. Math. Soc. Vol. 51 (1942), pp. 569-582.

[3] F. JAFFARD, *Théorie Arithmétique des Anneaux du Type de Dedekind*. Bulletin de la Soc. Math. de France, Tome 80 (1952), pág. 61-100.

[4] A. TYCHONOFF, *Uber die topologische Erweiterung von Räumen*. Math. Ann. 102 (1929), pp. 544-561.

[5] M. ZORN, *A Remark on Method in Transfinite Algebra*. Bulletin of the Amer. Math. Soc. Vol. 41 (1935), pp. 667-670.

Instituto de Matemática
Universidad del Sur
Bahía Blanca, Argentina.

INDICE VOLUMEN 1

ESTA ENTREGA
SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL 3 DE DICIEMBRE DE 1957
EN LA IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
CALLE PERÚ 684, BUENOS AIRES

CONTENIDO