universidad nacional de cuyo
departamento de investigaciones científicas

revista matemática cuyana

volumen 1
1955
páginas 169-194

instituto de matemática
mendoza
argentina

REVISTA MATEMATICA CUYANA

La REVISTA MATEMÁTICA CUYANA está destinada a la publicación de trabajos originales en los campos de la matemática pura y aplicada, y aparece en forma de fascículos sueltos sin periodicidad fija, anualmente reunidos en un volumen de 250 páginas, aproximadamente.

Castellano, inglés, alemán, francés e italiano, son los idiomas de la Revista.

Los artículos para la Revista deben ser escritos a máquina con doble espacio y enviados a nombre de uno de los miembros del Comité de Redacción, al Instituto de Matemática, Departamento de Investigaciones Científicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

Los colaboradores tienen derecho a 50 tiradas aparte gratis, de sus artículos, y podrán, si lo desean, recibir hasta 150 tiradas aparte a precio de costo.

En todo lo referente a suscripciones, adquisición de números atrasados, etc., dirigirse al Director del Instituto de Matemáticas, Profesor Mischa Cotlar.

Curvas de Darboux sobre las superficies de rotación [1]

POR SERGIO SISPÁNOV

En la presente nota nos ocuparemos en una forma más general y detallada de un tema propuesto en la *Revista de la Unión Matemática Argentina*, por nuestro estimado colega profesor Luis A. Santaló (Volumen IX, número 4, año 1943, página 121, probrema 47).

Se trata de las *curvas* de Darboux sobre las *superficies de rotación*. En este caso el problema puede reducirse a cuadraturas por los métodos casi elementales. Para esto tendremos en cuenta que el centro de la esfera osculatriz de la curva debe hallarse sobre la normal a la superficie en el mismo punto.

Sea $M(x, y, z)$ un punto de la superficie de rotación alrededor del eje OZ y $P(x, y)$ su proyección sobre el plano XOY. Las coordenadas del punto M se expresan por las fórmulas $x = r \cos \varphi$, $y = r$ sen φ, $z = f(r)$ (1), siendo r y φ las coordenadas polares del punto P. La última de las fórmulas representa lá ecuación de la generatriz en el plano XOZ.

En el primer término dejamos a un lado el caso trivial de ser $r =$ const., que corresponde al cilindro recto circular. Se sabe que para las hélices cilíndricas el centro C de la espera osculatriz, coincide con el centro C_0 de curvatura, pero éste último está sobre la normal del cilindro. De manera que las curvas de Darboux en este caso son *hélices* o *circunferencias*.

En el caso general las curvas sobre las superficies de revolución se determinan por sus proyecciones sobre el plano XOY. De suerte que el problema se reduce a la determinación de la dependencia funcional entre las variables r y φ. Como z es una función dada de r, entonces es también función de φ.

[1] Recibido el 1º de enero de 1956. Conferencia dictada por el doctor Sergio Sispánov en el Segundo Congreso Matemático Argentino (Buenos Aires).

Derivando las expresiones (1) encontramos sucesivamente

$$\begin{cases} x' = r' \cos \varphi - r \operatorname{sen} \varphi \\ y' = r' \operatorname{sen} \varphi + r \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = (r'' - r) \,.\, \cos \varphi - 2r' \,.\, \operatorname{sen} \varphi \\ y'' = (r'' - r) \,.\, \operatorname{sen} \varphi + 2r' \,.\, \cos \varphi \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x''' = (r''' - 3r') \,.\, \cos \varphi - (3r'' - r) \,.\, \operatorname{sen} \varphi \\ y''' = (r''' - 3r') \,.\, \operatorname{sen} \varphi + (3r' - r) \,.\, \cos \varphi \end{cases}$$

siendo r', r'', r''' derivadas con respecto a φ, y

$$z' = f'r, \quad z'' = f'r'' + f''r'^2, \qquad z''' = f'r''' + 3f''r'r'' + f'''r'^3 \tag{3}$$

en donde f', f'', f''' representan las derivadas de la funcion dada $f(r)$ con respecto a su argumento r.

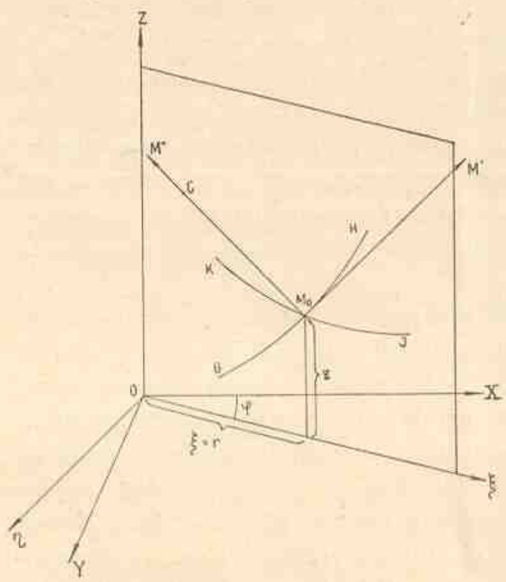

Fig 1

Para simplificar los cálculos giremos el sistema coordenado en un cierto ángulo φ alrededor del eje OZ. Designando por $0\,\xi\eta z$ el nuevo sistema, tenemos evidentemente:

$$< XO\xi = < YO\eta = \varphi$$

En la figura 1, vemos la generatriz GH, cuya ecuación es $z = f(r)$; un punto $M_0\,(\xi = r, \eta = 0, z)$ situado sobre la misma, y su proyección P_0 $(\xi = r, \eta = 0)$.

En el sistema $O\xi\eta z$ los cosenos directores de la normal M_0M'' a la superficie en el punto M_0 serán

$$-\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}; \quad \mathrm{o} \quad ; \quad \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}. \tag{4}$$

Las derivadas de las coordenadas ξ y η se hallan por las fórmulas (2) haciendo en ellas $\varphi = 0$, lo que nos da

$$\begin{cases} \xi' = r' \\ \eta' = r \end{cases} \quad \begin{cases} \xi'' = r'' - r \\ \eta'' = 2r' \end{cases} \quad \begin{cases} \xi''' = r''' - 3r' \\ \eta''' = 3r'' - r \end{cases} \tag{5}$$

Las relaciones (3) que determinan z', z'', z''' quedan invariables.

Formemos también las expresiones

$$\begin{cases} c_1 = s'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + z'^2 = z'^2 + r'^2 + r^2 \\ c_2 = s's'' = z'z'' + r'(r'' + r) \end{cases}$$

en donde s es el arco de la curva buscada JK

Los cosenos directores de la *tangente* M_0T a la curva JK en el sistema $\xi\eta Z$ serán

$$\frac{\xi'}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{\eta'}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{c_1}}$$

o con auxilio de las (5)

$$\frac{r'}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{r}{\sqrt{c_1}}, \qquad \frac{z'}{\sqrt{c_1}} \tag{6}$$

Los cosenos directores de la *normal* principal M_0N a la misma curva serán

$$\frac{a_1}{\sqrt{c_1 d_1}} \qquad \frac{a_2}{\sqrt{c_1 d_1}}, \qquad \frac{a_0}{\sqrt{c_1 d_1}}$$

en donde los coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= s'^2 z'' - s's''z' = (r'^2 + r^2) . z'' - r'(r'' + r) . z' \\ a_1 &= s'^2 \xi'' - s's''\xi' = - r' . z'z'' + (r'' - r) . z'^2 + r(rr'' - 2r'^2 - r^2) \\ a_2 &= s'^2 \eta'' - s's''\eta' = - r . z'z'' + 2r' . z'^2 - r'(rr'' - 2r'^2 + r^2) \end{aligned} \tag{7}$$

se encuentran haciendo uso de las (5).

Sin dificultad pueden determinarse también los cosenos directores de la *binormal* M_0B que son iguales a

$$\frac{b_1}{\sqrt{d_1}}, \qquad \frac{b_2}{\sqrt{d_1}}, \qquad \frac{b_0}{\sqrt{d_1}}$$

siendo

$$\begin{cases} b_0 = \xi'\eta'' - \xi''\eta' = - rr'' + 2r'^2 + r^2 \\ b_1 = \eta'z'' - \eta''z' = rz'' - 2r'z' \\ b_2 = z'\xi'' - z''\xi' = - r'z'' + (r'' - r)z' \end{cases}$$

Si se quiere podrían calcularse, además, los radios de *curvatura* ρ y de *torsión* τ mediante las relaciones

$$\rho = \sqrt{\frac{c_1^3}{d_1}}, \qquad \tau = - \frac{d_1}{d}.$$

Las contidades d_1 y d que figuran en las fórmulas anteriores deben ser calculadas previamente por las igualdades.

$$d_1 = b^2{}_0 + b^2{}_1 + b^2{}_2 = (r'^2 + r^2) \,.\, z''^2 - 2r'(r'' + r) \,.\, z'z'' + \\ + (r''^2 - 2rr'' + 4r'^2 + r^2) \,.\, z'^2 + (-rr'' + 2r'^2 + r')^2$$

$$d = b_1\xi''' + b_2\eta''' + b_0 z''' = (-rr'' + 2r'^2 + r^2) \,.\, z''' + (r \,.\, r''' - \\ - 3r'r'' - 2rr') \,.\, z'' + (-2r'r''' + 3r''^2 - 4rr'' + 6r'^2 + r^2) \,.\, z'$$

Habiendo obtenido las fórmulas generales relativas a las curvas sobre las *superficies de rotación*, pasemos al estudio de las curvas D.

Sean $C(\xi_0, \eta_0, z_0)$, el centro y R el radio de la esfera osculatriz en un punto $M(\xi, \eta, z)$ de la curva. Considerando ξ, η, z como funciones de φ formemos la expresión

$$\Phi(\varphi) = (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (z - z_0)^2$$

La ecuación de la esfera será:

$$\Phi(\varphi) - R^2 = 0$$

Dicha esfera pasa por 4 puntos infinitamente vecinos de la curva y por lo tanto

$$\Phi'(\varphi) = \Phi''(\varphi) = \Phi'''(\varphi) = 0$$

o más detenidamente

$$\begin{cases} (\xi - \xi_0) \,.\, \xi' + (\eta - \eta_0) \,.\, \eta' + (z - z_0) \,.\, z' = 0 \\ (\xi - \xi_0) \,.\, \xi'' + (\eta - \eta_0) \,.\, \eta'' + (z - z_0) \,.\, z'' + c_1 = 0 \\ (\xi - \xi_0) \,.\, \xi''' + (\eta - \eta_0) \,.\, \eta''' + (z - z_0) \,.\, z''' + 3c_2 = 0. \end{cases}$$

Haciendo coincidir M con $M_0(\xi = r;\ \eta = 0;\ z)$ y teniendo en cuenta que el centro C debe hallarse sobre la normal MM'' a la superficie, con auxilio de las (4) transformamos las relaciones obtenidas del siguiente modo

$$\frac{R(f'\xi' - z')}{\sqrt{1 + f'^2}} = 0, \quad \frac{R(f'\xi'' - z'')}{\sqrt{1 + f'^2}} + c_1 = 0; \quad \frac{R(f'\xi''' - z''')}{\sqrt{1 + f'^2}} + 3c_2 = 0.$$

Reemplazando z', z'', z''' por sus expresiones (3) y ξ', ξ'', ξ''' por (5) vemos que la primera de estas igualdades se convierte en una identidad y las demás dos nos dan

$$f_1 \,.\, R = c_1 \sqrt{1 + f'^2}, \qquad f_2 \,.\, R = 3c_2 \sqrt{1 + f'^2} \tag{8}$$

de donde

$$f_1 = f''r'^2 + f'r \qquad f_2 = r'(3f''r'' + f'''r'^2 + 3f')$$
$$c_1 = (1 + f'^2)\,r'^2 + r^2 \qquad c_2 = r'[(1 + f'^2)\,r'' + ff''r'^2 + r].$$

Comparando entre sí las fórmulas (8) se llega a la relación

$$c_1 f_2 = 3 f_1 c_2.$$

Si las letras c_1, f_1 y c_2, f_2, se reemplazan por sus expresiones y se efectúan las operaciones, entonces, después de simplificar ambos miembros por $r' \neq 0$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$rF \,.\, r'' + F_1 \,.\, r'^4 + F_2 \,.\, r'^2 = 0$$

siendo

$$\begin{cases} F \;= rf'' - f'(1 + f'^2) \\ F_1 = \dfrac{1}{3}(1 + f'^2) f''' - f'f''^2 \\ F_2 = \dfrac{1}{3} r^2 f''' - (1 + f'^2)(rf'' - f'). \end{cases}$$

Es fácil comprobar que los coeficientes F, F_1, F_2 verifican a las identidades

$$F_2 = \frac{1}{3}\, rF' - F, \qquad rF_1 = (1 + f'^2) \,.\, F' - f'f'' \,.\, F \tag{9}$$

Para integrar la ecuación obtenida se practica el cambio de variable tomando r por argumento y φ por función. De manera que

$$r' = \frac{1}{\varphi'}, \qquad r'' = -\frac{\varphi''}{\varphi'^3} \tag{10}$$

y la ecuación diferencial se convierte en

$$rF \,.\, \varphi'\varphi'' = F_1 + F_2 \,.\, \varphi'^2 \tag{11}$$

en donde las derivadas se toman con respecto a r.

En primer término consideremos el caso excepcional en que

$$F = rf'' - f'(1 + f'^2) = 0.$$

Tomando $z = f(r)$ por función desconocida e integrando resulta

$$r^2 + (z - b)^2 = c^2$$

siendo b y c constante de integracion, o bien

$$z = \text{const.}$$

Se obtiene, pues, una esfera con el centro sobre el eje OZ y su caso particular un plano.

Este caso no ofrece interés, ya que todas las curvas sobre un plano o una esfera son curvas D.

Supongamos ahora que $F \neq 0$, idénticamente. Introduciendo la nueva variable ψ bajo la condición :

$$\varphi'^2 = \frac{\psi}{r^2}$$

se tendrá derivando

$$\varphi'\varphi'' = \frac{\psi'}{2r^2} - \frac{\psi}{r^3}$$

y la ecuación (11) toma la forma

$$F\psi' = \frac{2}{r}(F + F_2) . \psi + 2rF_1.$$

Si se sustituyen aquí F_2 y rF_1, por sus expresiones (9) se llega a la relación

$$F . (\psi' + 2f_, f'') = \frac{2}{3} F' . [\psi + (1 + f'^2)]$$

o separando las variables

$$\frac{\psi' + 2f'f''}{\psi + (1 + f'^2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{F'}{F}.$$

La integración nos da

$$\psi + (1 + f'^2) = k\, F^{2/3}.$$

Volviendo a la variable primitiva φ, encontramos

$$\varphi' = \pm \frac{1}{r} \sqrt{k\, F^{2/3} - (1 + f'^2)} \qquad (12)$$

en donde la constante arbitraria k debe ser positiva. Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{1}{r} \sqrt{k\, F^{2/3} - (1 + f'^2)}\, dr \qquad (13)$$

siendo

$$F = rf'' - f'(1 + f'^2) \tag{14}$$

y φ_0 otra constante arbitraria

Introduciendo el resultado obtenido en las relaciones (8) hallamos sin dificultad

$$c_1 = \frac{kr^2 F^{2/3}}{kF^{2/3} - (1 + f'^2)}, \qquad f_1 = \frac{r(kf'F^{2/3} + F)}{kF^{2/3} - (1 + f'^2)}$$

y

$$R = \frac{kr\sqrt{1 + f'^2}}{kF^{2/3} - (1 + f'^2)}. \tag{15}$$

Para el punto M_0 ($\xi = r$; $\eta = 0$; z) coordenadas del centro C serán

$$\xi_0 = r - \frac{krf'}{kf' + F^{1/3}}, \qquad \eta = 0, \qquad z_0 = z + \frac{kr}{kf' + F^{1/3}}.$$

Apliquemos la teoría expuesta a un *toro*, o sea a un anillo circular cuya generatriz en el plano $\xi\, OZ$ se da por la ecuación

$$(r - a)^2 + (z - b)^2 - c^2.$$

Despejando z, vamos a tener

$$z = f(r) = b \mp \sqrt{c^2 - (r - a)^2}$$

o derivando

$$f'(r) = \pm \frac{r - a}{\sqrt{c^2 - (r - a)^2}}.$$

Luego por las fórmulas (14), (15) y (13) calculamos

$$F = \pm \frac{ac^2}{[c^2 - (r - a)^2]^{3/2}}, \qquad R = \frac{kc^2}{k(r - a) + \sqrt[3]{ac^2}}$$

y

$$\varphi = \varphi_0 \mp \int \frac{\sqrt{k(ac^2)^{2/3} - c^2}}{r\sqrt{c^2 - (r - a)^2}}\, dr.$$

Para que el numerador de la función subintegral sea real debe cumplirse con la condición

$$k \geqq \left(\frac{c}{a}\right)^{2/3}.$$

Supongamos, primero, que en esta desigualdad tenga lugar el signo $>$.

Integrando e invirtiendo los resultados llegamos a tres casos:

1° Si $a > c$, entonces

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a \pm c \operatorname{sen} l(\varphi - \varphi_0)}$$

siendo

$$l = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{k(ac^2)^{2/3} - c^2}}$$

El radio r alcanza a sus valores extremos $r = a \mp c$, cuando $\varphi = \varphi_0 \pm \dfrac{\pi}{2l}$. La curva D. tiene forma *helicoidal* y su proyección sobre el plano $\xi\, 0\, \eta$ es una curva *periódica* de período $\dfrac{2\pi}{l}$.

2° Si $a < c$, entonces

$$r = \frac{c^2 - a^2}{c\, Ch\, l(\varphi - \varphi_0) - a}$$

siendo

$$l = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{k(ac^2)^{2/3} - c^2}}.$$

El radio r alcanza a su máximo $r = a + c$, cuando $\varphi = \varphi_0$. Para $\varphi = \infty$ resulta $r = 0$. La curva D y su proyección tienen la forma de *espirales*.

3° Si $a = c$, entonces

$$r = \frac{2a}{1 + l(\varphi - \varphi_0)^2}$$

siendo

$$l = \frac{1}{k - 1}, \qquad k > 1.$$

La curva D y su proyección son *espirales*.

En el caso límite de ser $k = \left(\dfrac{c}{a}\right)^{2/3}$ el numerador de la función subintegral se anula y por lo tanto $\varphi = \varphi_0$.

De manera que las curvas D coinciden con los meridianos que son al mismo tiempo generatrices del toro.

Pasemos al estudio de las curvas *geodésicas*: Para las curvas de esta especie la normal principal M_0N de la curva coincide con la normal M_0M'' de la superficie y como esta es perpendicular al eje $O\eta$ entonces, conforme a la tercera de las relaciones (7) se obtiene

$$a = -r \, . z'z'' + 2r' \, . z'^2 - r'(rr' - 2r'^2 - r^2) = 0.$$

Introduciendo aquí las expresiones (3) y simplificando por r' resulta

$$r(1 + f'^2) \, . r'' + [rf'f'' - 2(1 + f'^2)] \, . r'^2 - r^2 = 0$$

Tomando r por argumento y φ por función, con auxilio de las igualdades (10) llegamos a una ecuación diferencial que después de ser multiplicada por el factor integrante $\frac{2}{r^5}$ toma la forma

$$\left(2 \, . \frac{f'f''}{r^4} - 4 \, . \frac{1 + f'^2}{r^5}\right) \, . \frac{1}{\varphi'^2} - 2 \frac{1 + f'^2}{r^4} \; \frac{\varphi''}{\varphi'^3} - \frac{2}{r^3} = 0.$$

Integrando ambos miembros, se tendrá

$$\frac{1 + f'^2}{r^4 \varphi'^2} + \frac{1}{r^2} = k.$$

Despejando φ', resulta

$$\varphi' = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{kr^2 - 1}} \tag{16}$$

en donde la constante de integración k verifica a la desigualdad $k > 0$.

Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{kr^2 - 1}} \; dr.$$

Consideramos ahora las curvas *helicoidales* que se caracterizan por la condición $\rho/\tau =$ const.

Tormando OZ por el eje de la hélice y recordando que la normal principal M_0N es perpendicular a dicho eje, en virtud de la primera relación (7) tendremos

$$a_0 = (r'^2 + r^2) z'' - r'(r'' + r) \, . z' = 0$$

Haciendo uso de las igualdades (3), hallamos

$$r^2 f' r'' + f'' \, . r'^4 + r(rf'' - f') r'^2 = 0.$$

Si, como antes, r se toma por argumento y φ por función, entonces hallamos haciendo uso de las expresiones (10)

$$r^2 f' \cdot \varphi'' = r\,(rf'' - f') \cdot \varphi' + \frac{f''}{\varphi'}$$

lo que es la ecuación de Bernoulli con respecto a φ'. Su integración nos da

$$\varphi' = \frac{1}{r}\sqrt{kf'^2 - 1} \tag{17}$$

siendo k una constante que debe ser positiva.

Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{1}{r}\sqrt{kf'^2 - 1}.$$

Ocupémonos también de las curvas *loxodrómicas* que cortan los meridianos de la superficie de rotación bajo un cierto ángulo constante α. Los cosenos directores de la tangente M_0M' al meridiano GH son

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}}; \quad 0 \quad ; \quad \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}.$$

Los cosenos directores de la tangente M_0T a la curva buscada se dan por las fórmulas (6).

Recordando la expresión para el coseno del ángulo entre dos rectas, sin dificultad encontramos

$$\cos \alpha = \frac{r' + f'z'}{\sqrt{c_1} \cdot \sqrt{1 + f'^2}}$$

Reemplazando aquí c_1 por $z'^2 + r'^2 + r^2$ y z', a su vez, por $f'r'$ vamos a tener

$$\frac{r'(1 + f'^2)}{\sqrt{1 + f'^2} \cdot \sqrt{(1 + f'^2) \cdot r'^2 + r^2}} = \cos \alpha$$

de donde

$$\pm \frac{r}{r'\sqrt{1 + f'^2}} = \operatorname{tng} \alpha = k$$

siendo k constante.

Teniendo en cuenta que

$$r' = \frac{1}{\varphi'}$$

hallamos

$$\varphi' = \pm \frac{k}{r} \sqrt{1 + f'^2}. \tag{18}$$

Finalmente

$$\varphi = \varphi_0 \pm k \int \frac{1}{r} \sqrt{1 + f'^2}\, dr$$

En conclusión apliquemos los resultados obtenidos para demostrar algunas proposiciones de la teoría de superficies. Procuremos por ejemplo, encontrar las *superficies de rotación* cuyas curvas D son *hélices*. Para esto igualemos las expresiones (12) y (17), lo que nos conduce a la relación

$$\pm \frac{1}{r} \sqrt{k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2)} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{k_2 f'^2 - 1}$$

en que k_1 y k_2 son dos constantes.

Elevando al cuadrado y simplificando, hallamos sucesivamente

$$k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2) = k_2 f'^2 - 1,$$

$$F = \pm \left(\frac{k_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} \cdot f'^3, \qquad rf'' = f'(1 + f'^2) \pm \left(\frac{k_2 + 1}{k_1}\right)^{2/3} f'^3.$$

Recordando que la función $f(r)$ que actualmente se busca, fué designada por la letra z y haciendo

$$q = 1 \pm \left(\frac{k_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2}$$

llegamos a la ecuación diferencial

$$rz'' = z' + qz'^3$$

cuya integral general es

$$r^2 = 2p \,.\, (z - z_0) - q\,(z - z_0)^2$$

en donde p y z_0 son constante de integración.

Queda pues, demostrado el teorema de Blaschke según el cual la coincidencia de las curvas D. con las *helicoidales* tiene lugar solamente para las *superficies de rotación* cuyas generatrices son *secciones cónicas*.

Consideremos otro ejemplo. Vamos a ver si pueden las curvas D convertirse en las *laxodrómicas*. Igualando (12) a (18) se obtiene

$$\pm \frac{1}{r} \sqrt{k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2)} = \pm \frac{k_2}{r} \sqrt{1 + f'^2}$$

de donde deducimos sucesivamente

$$k_1 F^{2/3} - (1 + f'^2) = k^2{}_2 (1 + f'^2), \qquad F = \pm \left(\frac{k^2{}_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} \cdot (1 + f'^2)^{3/2}$$

$$rf'' = (1 + f'^2) \cdot \left[f' \pm \left(\frac{k^2{}_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{1 + f'^2}\right].$$

Haciendo

$$f(r) = z \qquad \text{y} \qquad \pm \left(\frac{k^2{}_2 + 1}{k_1}\right)^{3/2} = \frac{1}{k}$$

representamos la ecuación diferencial obtenida bajo la forma

$$rz'' = (1 + z'^2) \cdot \left(z' + \frac{1}{k} \sqrt{1 + z'^2}\right).$$

Su integral general es

$$(z - a)^2 + (r - b)^2 = (kb)^2,$$

siendo a y b constantes arbitrarias.

De esta manera está demostrado el teorema de Santaló que dice que la *superficie de rotación* con las curvas D idénticas a las *laxodrómicas* son ineludiblemente el *toro* y sus degeneraciones : el *cono* y el *cilindro*, así como la esfera y el plano.

San Juan 16 de diciembre de 1949.