Estimaciones óptimas de soluciones semiestables para problemas del k-Hesiano

Miguel Angel Navarro Burgos[♠] y Justino Sánchez[♣]

[♠]Departamento de Estatística, Análise Matemática e Optimización
Universidade de Santiago de Compostela
Departamento de Matemática, FCEyN, UBA
[♣]Departamento de Matemáticas
Universidad de La Serena
Avenida Cisternas 1200, La Serena, Chile.

27 de septiembre de 2018

Problema extremal

$$\begin{cases} S_k(D^2u) &= \lambda g(u) & \text{en } B_1, \\ u &< 0 & \text{en } B_1, \\ u &= 0 & \text{en } \partial B_1, \end{cases} \qquad (P_\lambda)$$

donde B_1 es la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ es un parámetro, $D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ es la matriz hessiana de u, $S_k(D^2u)$ denota el operador k-Hessiano de u, $n \geq k \geq 1$ y

$$g \text{ is } C^1, \text{ no creciente, } g(0) > 0 \text{ y } \lim_{t \to -\infty} \frac{g(t)}{|t|^k} = +\infty. \qquad (2)$$

k-Hessiano

General

Para una función u dos veces diferenciable definida en un dominio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el *operador k-Hessiano* para $n \geq k \geq 1$ es definido por:

$$S_k(D^2u) = \sigma_k\left(\Lambda(D^2u)\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

donde $\Lambda(D^2u) := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ y λ's son los valores propios de D^2u, y σ_k es la k-ésima función simétrica elemental (ver por ejemplo [5]).

Forma radial

$$S_k(D^2u) = c_{n,k} r^{1-n}\left(r^{n-k}(u')^k\right)', \text{ donde } c_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}.$$

Conjunto factible

$$\Phi^k(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \sigma_i(\Lambda(D^2u)) > 0 \text{ en } \Omega, i = 1, ..., k\}.$$

General

Para una función u dos veces diferenciable definida en un dominio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el *operador k-Hessiano* para $n \geq k \geq 1$ es definido por:

$$S_k(D^2u) = \sigma_k\left(\Lambda(D^2u)\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

donde $\Lambda(D^2u) := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ y λ's son los valores propios de D^2u, y σ_k es la k-ésima función simétrica elemental (ver por ejemplo [5]).

Forma radial

$$S_k(D^2u) = c_{n,k} r^{1-n} \left(r^{n-k}(u')^k\right)', \text{ donde } c_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}.$$

Conjunto factible

$$\Phi^k(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \sigma_i(\Lambda(D^2u)) > 0 \text{ en } \Omega, i = 1, ..., k\}.$$

k-Hessiano

General

Para una función u dos veces diferenciable definida en un dominio suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el *operador k-Hessiano* para $n \geq k \geq 1$ es definido por:

$$S_k(D^2u) = \sigma_k\left(\Lambda(D^2u)\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

donde $\Lambda(D^2u) := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ y λ's son los valores propios de D^2u, y σ_k es la k-ésima función simétrica elemental (ver por ejemplo [5]).

Forma radial

$$S_k(D^2u) = c_{n,k} r^{1-n}\left(r^{n-k}(u')^k\right)', \text{ donde } c_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}.$$

Conjunto factible

$$\Phi^k(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \sigma_i(\Lambda(D^2u)) > 0 \text{ en } \Omega,\ i = 1, ..., k\}.$$

Motivación

En [1] para $g(u) = e^{-u}$, demuestran que si $n \geq 2k + 8$, entonces:

$$u^*(|x|) = 2k \log |x| \quad \text{y} \quad \lambda^* = c_{n,k}(2k)^k(n - 2k).$$

En [3] para $g(u) = (1 - u)^q$, demuestran que si $n > 2k + 8$ y $q = k\left(1 - 2/\delta_{n,k}\right)$, entonces:

$$u^*(|x|) = 1 - |x|^{\delta_{n,k}} \quad \text{and} \quad \lambda^* = c_{n,k}\left(-\delta_{n,k}\right)^k\left(n - 2k + k\delta_{n,k}\right),$$

donde $\delta_{n,k} = \frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}$.

Motivación

En [1] para $g(u) = e^{-u}$, demuestran que si $n \geq 2k + 8$, entonces:

$$u^*(|x|) = 2k \log |x| \quad \text{y} \quad \lambda^* = c_{n,k}(2k)^k(n - 2k).$$

En [3] para $g(u) = (1 - u)^q$, demuestran que si $n > 2k + 8$ y $q = k\,(1 - 2/\delta_{n,k})$, entonces:

$$u^*(|x|) = 1 - |x|^{\delta_{n,k}} \quad \text{and} \quad \lambda^* = c_{n,k}\left(-\delta_{n,k}\right)^k\left(n - 2k + k\delta_{n,k}\right),$$

donde $\delta_{n,k} = \frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}$.

Teorema principal solución extremal

Teorema

Se asume que g satisface (2). Entonces existe un parámetro $\lambda^* \in (0, \infty)$ tal que:

a) *Si $0 < \lambda < \lambda^*$, el problema (P_λ) una solución maximal clásica u_λ. En particular, la familia $\{u_\lambda : 0 < \lambda < \lambda^*\}$ es no creciente en λ. Además, cada u_λ es semi-estable.*

b) *Para $\lambda > \lambda^*$, el problema (P_λ) no admite una solución clásica.*

c) *El límite puntual $\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u_\lambda = u^* \in W_0^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ es una solución débil de (P_{λ^*}), y es llamada solución extremal. En adición, u^* es semi-estable.*

Nota

Decimos que una función v es una solución maximal de (P_λ) si v es una solución de (P_λ), y para cada subsolución u de (P_λ), se tiene $u \leq v$.

Teorema principal solución extremal

Teorema

Se asume que g *satisface* (2). *Entonces existe un parámetro* $\lambda^* \in (0, \infty)$ *tal que:*

- $a)$ *Si* $0 < \lambda < \lambda^*$, *el problema* (P_λ) *una solución maximal clásica* u_λ. *En particular, la familia* $\{u_\lambda : 0 < \lambda < \lambda^*\}$ *es no creciente en* λ. *Además, cada* u_λ *es semi-estable.*
- $b)$ *Para* $\lambda > \lambda^*$, *el problema* (P_λ) *no admite una solución clásica.*
- $c)$ *El límite puntual* $\lim\limits_{\lambda \uparrow \lambda^*} u_\lambda = u^* \in W_0^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *es una solución débil de* (P_{λ^*}), *y es llamada solución extremal. En adición,* u^* *es semi-estable.*

Nota

Decimos que una función v *es una solución maximal de* (P_λ) *si* v *es una solución de* (P_λ), *y para cada subsolución* u *de* (P_λ), *se tiene* $u \leq v$.

Teorema solución extremal

Teorema

Sea $n \geq 2$. *supóngase que* g *satisface* (2). *Sea* u^* *la solución extremal de* (P_{λ^*}). *Entonces:*

a) *Si* $n < 2k+8$, $|u^*(r)| \leq C(1-r)$, $\forall r \in (0,1]$.

b) *Si* $n = 2k+8$, $|u^*(r)| \leq C\,|\log r|$, $\forall r \in (0,1]$.

c) *Si* $n > 2k+8$,
$$|u^*(r)| \leq C\left(r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}} - 1\right), \forall r \in (0,1].$$

d) *Si* $n \geq 2k+8$ *y* $i \in \{1,2,3\}$ *(*$i=3$ *si* g *es convexa),*
$$\left|\partial_r^{(i)} u^*(r)\right| \leq C r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}-i}, \ \forall r \in (0,1].$$

Donde $C = D_{n,k} \min_{t\in[1/2,1]}\{(u^*)'(t)\}$ *y* $D_{n,k}$ *depende de* n *y* k.

Problema general del k-Hessiano

Estudiamos soluciones semi-estables radiales $u \in \Phi^k(B_1)$

$$S_k(D^2u) = g(u) \ \text{ in } \ B_1, \tag{kP}$$

donde $g \in C^1$ es una función positiva no creciente.

Definición

$a)$ u es una *solución clásica* de (kP) si $u \in \Phi_0^k(B_1)$ y cumple (kP).

$b)$ u es una *solución débil* de (kP) si $u \in L^{k+1}(B_1)$, $\int_{B_1} \left\{\sum u_i u_j S_k^{ij}(D^2u)\right\} < \infty$, $g(u) \in L^1(B_1)$ y

$$\int_{B_1} \left\{\frac{1}{k} \sum u_i \varphi_j S_k^{ij}(D^2u) + g(u)\varphi\right\} = 0, \ \forall \varphi \in C_c^1(B_1),$$

donde $S_k^{ij}(D^2u) = \frac{\partial}{\partial u_{ij}} S_k(D^2u)$.

Problema general del k-Hessiano

Definición

Sea u una solución de (kP). Decimos que u es *semi-estable* si:

$$\mathcal{Q}_u(\varphi) := \int_{B_1} \left\{ \sum \varphi_i \varphi_j S_k^{ij}(D^2u) + g'(u)\varphi^2 \right\} \geq 0, \ \forall \varphi \in C_c^1\left(B_1 \setminus \{0\}\right).$$

Notar que la expresión anterior corresponde a la segunda variación del funcional de energía asociado a (kP), dado por:

$$J_k(u) = \frac{1}{k+1}\int_{B_1} (-u)S_k(D^2u)dx - \int_{B_1} G(u)dx, \quad u \in \Phi_0^k(B_1),$$

donde $G' = -g$.

Problema adaptado

Estudiamos soluciones semi-estables radiales crecientes $(u' > 0)$ $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ de

$$\operatorname{div}\left(|x|^{1-k}|\nabla u|^{k-1}\nabla u\right) = \tilde{g}(u) = c_{n,k}^{-1}\, g(u) \text{ in } B_1 \setminus \{0\}, \qquad (aP)$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función localmente Lipschitz y el espacio $W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ es un espacio de sobolev con peso $|x|^{1-k}$ y norma

$$\|(\cdot)\|_{W^{1,k+1}(B_1,|x|^{1-k})} = \|(\cdot)\|_{L^{k+1}(B_1)} + \|\nabla(\cdot)\|_{L^{k+1}(B_1,|x|^{1-k})},$$

donde $\|\nabla(\cdot)\|_{L^{k+1}(B_1,|x|^{1-k})} = \left(\int_{B_1} |x|^{1-k}|\nabla(\cdot)|^{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$.

Definiciones para el problema adaptado

Definición

Decimos que u es una *solución débil* de (aP) si:
$u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, $g(u) \in L^1\left(B_1\right)$ y

$$\int_{B_1} |x|^{1-k} \left|\nabla u\right|^{k-1} (\nabla u, \nabla \varphi) + \int_{B_1} \tilde{g}(u)\varphi = 0, \, \forall \varphi \in C_c^1(B_1).$$

Definición

Sea $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ una solución de (aP). Decimos que u es *semi-estable* si:

$$Q_u(\xi) := \int_{B_1} |x|^{1-k} \left|\nabla u\right|^{k-1} \left((k-1) \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla \xi \right)^2 + |\nabla \xi|^2 \right) +$$
$$+ \int_{B_1} \tilde{g}'(u)\xi^2 \geq 0, \, \xi \in C_c^1\left(B_1 \setminus \{0\}\right).$$

Definiciones para el problema adaptado

Definición

Decimos que u es una *solución débil* de (aP) si:
$u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, $g(u) \in L^1(B_1)$ y

$$\int_{B_1} |x|^{1-k} |\nabla u|^{k-1} (\nabla u, \nabla \varphi) + \int_{B_1} \tilde{g}(u)\varphi = 0, \ \forall \varphi \in C_c^1(B_1).$$

Definición

Sea $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ una solución de (aP). Decimos que u es *semi-estable* si:

$$\mathcal{Q}_u(\xi) := \int_{B_1} |x|^{1-k} |\nabla u|^{k-1} \left((k-1) \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \nabla \xi \right)^2 + |\nabla \xi|^2 \right) + \\ + \int_{B_1} \tilde{g}'(u)\xi^2 \geq 0, \ \xi \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\}).$$

Teorema

Sea $n \geq 2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP) *satisfaciendo que* $u'(r) > 0$ *para todo* $r \in (0,1)$. *Entonces:*

a) *Si* $n < 2k+8$, $|u(r)| \leq C, \ \forall r \in (0,1]$.

b) *Si* $n = 2k+8$, $|u(r)| \leq C\left(|\log r| + 1\right), \ \forall r \in (0,1]$.

c) *Si* $n > 2k+8$,

$$|u(r)| \leq C r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}}, \ \forall r \in (0,1].$$

Donde $C = D_{n,k} \|u\|_{W^{1,k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})}$ *y* $D_{n,k}$ *es una constante que depende solo de* n *y* k.

Resultados problema adaptado

Teorema

Sea $n \geq 2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP) *satisfaciendo que* $u'(r) > 0$ *para todo* $r \in (0,1)$*. Entonces:*

$a)$ *Si* g *es no negativa,*

$$\left|u'(r)\right| \leq D_{n,k} \|\nabla u\|_{L^{k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})} r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+k^2+4k-1}{(k+1)^2}}, \; \forall r \in (0, 1/2].$$

$b)$ *Si* g *es no negativa y no creciente,*

$$\left|u^{(i)}(r)\right| \leq D'_{n,k} \left(\min_{t\in[1/2,1]} u'(t)\right) r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}-i}, \; \forall r \in (0,1], \; i \in \{1,2\}.$$

$c)$ *Si* g *es no negativa, no creciente y convexa*

$$\left|u^{(3)}(r)\right| \leq D'_{n,k} \left(\min_{t\in[1/2,1]} u'(t)\right) r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}-k^2-3}{(k+1)^2}}, \; \forall r \in (0,1].$$

Donde $D_{n,k}$ *y* $D'_{n,k}$ *son constantes que solo dependen de* n *y* k*.*

Resultados problema adaptado

Teorema

Sea $n \geq 2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz no negativa y no creciente, y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP) *satisfaciendo que* $u'(r) > 0$ *para todo* $r \in (0,1)$. *Entonces:*

a) *Si* $n < 2k+8$, $|u(r) - u(1)| \leq C(1-r)$, $\forall r \in (0,1]$.

b) *Si* $n = 2k+8$, $|u(r) - u(1)| \leq C\left|\log r\right|$, $\forall r \in (0,1]$.

c) *Si* $n > 2k+8$,

$$|u(r) - u(1)| \leq C\left(r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}} - 1\right), \forall r \in (0,1].$$

Donde $C = D_{n,k} \min_{t\in[1/2,1]}\{u'(t)\}$ *y* $D_{n,k}$ *es una constante que depende solo de* n *y* k.

Resultados k-Hessiano

Teorema

Sea $n \geq 2$, $g \in C^1$ una función positiva y no creciente, y $u \in \Phi_0^k(B_1)$ una solución radial semi-estable de (kP). Entonces:

a) *Si $n < 2k+8$, $|u(r)| \leq C(1-r)$, $\forall r \in (0,1]$.*

b) *Si $n = 2k+8$, $|u(r)| \leq C\,|\log r|$, $\forall r \in (0,1]$.*

c) *Si $n > 2k+8$,*

$$|u(r)| \leq C\left(r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}} - 1\right), \forall r \in (0,1],$$

d) *Si $n \geq 2k+8$, para $i \in \{1,2,3\}$ ($i = 3$ si g es convexa),*

$$\left|u^{(i)}(r)\right| \leq Cr^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}-i}, \forall r \in (0,1].$$

Donde $C = D_{n,k}\min_{t\in[1/2,1]}\{u'(t)\}$ y $D_{n,k}$ es una constante que depende solo de n y k.

Lema independencia de la no linealidad

Lema

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial de* (aP)*. Entonces:*

$$\mathcal{Q}_u(u'\eta) = \int_{B_1} |x|^{1-k} |u'|^{k+1} \left\{ |\nabla\eta|^2 + (k-1)\left(\frac{x}{|x|}, \nabla\eta\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{k(k-1)}{k+1}\left(\frac{x}{|x|^2}, \nabla\eta^2\right) - \frac{k(2n-k-1)\eta^2}{(k+1)|x|^2} \right\},$$

para toda $\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$.

Demostración.

Paso 1. Derivar la función, multiplicamos por $u'\eta^2$ con $\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$,

$$-(n-1)\left(\left|\frac{u'}{r}\right|^{k+1}\eta^2\right) + \left(u'\eta^2\right)\Delta\left(\left|\frac{u'}{r}\right|^{k-1}u'\right) = c_{n,k}^{-1}\,g'(u)(u'\eta)^2.$$

Paso 2. Como $u \in C_{loc}^{2,\beta}\left(\overline{B_1} \setminus \{0\}\right)$ para algún $\beta \in (0,1)$ y u satisface la forma radial de (aP). Sea $\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$, tomamos $\xi = u'\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$ en Q.

□

Demostración.

Paso 1. Derivar la función, multiplicamos por $u'\eta^2$ con $\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$,

$$-(n-1)\left(\left|\frac{u'}{r}\right|^{k+1}\eta^2\right)+\left(u'\eta^2\right)\Delta\left(\left|\frac{u'}{r}\right|^{k-1}u'\right)=c_{n,k}^{-1}\,g'(u)(u'\eta)^2.$$

Paso 2. Como $u \in C_{loc}^{2,\beta}\left(\overline{B_1} \setminus \{0\}\right)$ para algún $\beta \in (0,1)$ y u satisface la forma radial de (aP). Sea $\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$, tomamos $\xi = u'\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$ en $\mathcal{Q}$.

□

Lema

Si $n < 2k$ *y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, $u \in L^{\infty}(B_1)$.

Lema

Sea $n \geq 2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP). *Entonces existe una constante* $K_{n,k}$ *que depende solamente de* n *y* k *tal que:*

$$\int_0^r t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt \leq K_{n,k} \left\|\nabla u\right\|^{k+1}_{L^{k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})} r^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+4k}{k+1}}, \; \forall r \in [0,1].$$

Lemas esenciales

Lema

Si $n < 2k$ *y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, $u \in L^\infty(B_1)$.

Lema

Sea $n \geq 2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP). *Entonces existe una constante* $K_{n,k}$ *que depende solamente de* n *y* k *tal que:*

$$\int_0^r t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt \leq K_{n,k} \left\|\nabla u\right\|^{k+1}_{L^{k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})} r^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+4k}{k+1}}, \ \forall r \in [0,1].$$

Lemas esenciales

Demostración.

Paso 1. Reemplazamos $r\eta$ en el Lema

$$\int_0^1 t^{n-k}\left|u'\right|^{k+1}\left((k+1)(t\eta)'^2+2(k-1)\eta(t\eta)'-(2n-k-1)\eta^2\right)\,dt \geq 0.$$

Paso 2. Tomamos $\epsilon > 0$ y fijamos $r \in (0,1/2)$ y consideramos

$$\eta_\epsilon(t)=\begin{cases} \dfrac{r^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+k-1}{k+1}}}{\epsilon} & \text{if } 0\leq t\leq \epsilon,\\ \dfrac{r^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+k-1}{k+1}}}{t} & \text{if } \epsilon< t\leq r,\\ t^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k+2k}}{k+1}} & \text{if } r<t\leq 1/2,\\ 2^{\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+3k+1}{k+1}}(1-t) & \text{if } 1/2<t\leq 1.\end{cases}$$

Demostración.

Paso 1. Reemplazamos $r\eta$ en el Lema

$$\int_0^1 t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} \left((k+1)(t\eta)'^2 + 2(k-1)\eta(t\eta)' - (2n-k-1)\eta^2\right) dt \geq 0.$$

Paso 2. Tomamos $\epsilon > 0$ y fijamos $r \in (0, 1/2)$ y consideramos

$$\eta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{r^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+k-1}{k+1}}}{\epsilon} & \text{if} \quad 0 \leq t \leq \epsilon, \\ \frac{r^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+k-1}{k+1}}}{t} & \text{if} \quad \epsilon < t \leq r, \\ t^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k}{k+1}} & \text{if} \quad r < t \leq 1/2, \\ 2^{\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+3k+1}{k+1}}(1-t) & \text{if} \quad 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Demostración

De donde tenemos que:

$$\overbrace{-2(n-2k)\left(\frac{r^{-\frac{\sqrt{2(k+1)n-4k}+k-1}{k+1}}}{\epsilon}\right)^2 \int_0^{\epsilon} t^{n-k}\left|u'\right|^{k+1}\,dt+}^{\bigstar}$$

$$-2\left(n-\frac{k+1}{2}\right) r^{\frac{-2\sqrt{2(k+1)n-4k}-4k}{k+1}} \int_{\epsilon}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^2 t^{n-k}\left|u'\right|^{k+1}\,dt+$$

$$+2^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+6k+2}{k+1}} \int_{1/2}^{1} v_{n,k}(t) t^{n-k}\left|u'\right|^{k+1}\,dt \geq 0,$$

donde $v_{n,k}(t) = (1+9k-2n)t^2 + (4n-12k)t - 2n + 4k$.

Demostración.

Paso 3. Para $n < 2k$ $u'(0) = 0$ $\bigstar \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$ y para $n \geq 2k$ $\bigstar \leq 0$. Por lo tanto, hacemos $\epsilon \to 0$ y obtenemos el Lema para $r \in [0, 1/2]$.

Paso 4. Para $r \in (1/2, 1]$, usamos el Lema para $r = 1/2$ y como $2r \geq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^r t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt &\leq \int_0^{1/2} t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt + \int_{1/2}^1 t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt, \\
&\leq \left(\alpha_{n,k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+4k}{k+1}} + 1\right) \int_{1/2}^1 t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt, \\
&\leq \alpha'_{n,k} r^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+4k}{k+1}}
\end{aligned}$$

Demostración.

Paso 3. Para $n < 2k$ $u'(0) = 0$ $\bigstar \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$ y para $n \geq 2k$ $\bigstar \leq 0$. Por lo tanto, hacemos $\epsilon \to 0$ y obtenemos el Lema para $r \in [0, 1/2]$.

Paso 4. Para $r \in (1/2, 1]$, usamos el Lema para $r = 1/2$ y como $2r \geq 1$, tenemos que:

$$\int_0^r t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt \leq \int_0^{1/2} t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt + \int_{1/2}^1 t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt,$$

$$\leq \left(\alpha_{n,k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+4k}{k+1}} + 1 \right) \int_{1/2}^1 t^{n-k} \left|u'\right|^{k+1} dt,$$

$$\leq \alpha'_{n,k} r^{\frac{2\sqrt{2(k+1)n-4k}+4k}{k+1}}$$

$\square$

Proposición esencial

Proposición

Sea $n \geq 2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP). *Entonces existe una constante* $K'_{n,k}$ *que depende solamente de* n *y* k *tal que:*

$$\left| u(r) - u\left(\frac{r}{2}\right) \right| \leq$$

$$K'_{n,k} \left\| \nabla u \right\|_{L^{k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})} r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}}, \; \forall r \in (0,1].$$

Demostración.

Usando argumentos similares a [2]. Sea $r \in (0,1]$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y $r_1 \in (1/2, 1] : r = r_1/2^{m-1}$. Como u es radial, tenemos

$$|u(r_1)| \leq \|u\|_{L^\infty(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}})} \leq \beta_{n,k} \|u\|_{W^{1,k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})}.$$

Como

$$\delta_{n,k} = -\frac{\left(\sqrt{2(k+1)n - 4k} + 2k\right)(n - 2k - 8)}{(k+1)(\sqrt{2(k+1)n - 4k} + 2k + 4)}.$$

Desde la proposición y $|u(r)| \leq |u(r) - u(r_1)| + |u(r_1)|$,

$$|u(r)| \leq \left(K'_{n,k} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{r_1}{2^{i-1}}\right)^{\delta_{n,k}} + \beta_{n,k}\right) \|u\|_{W^{1,k+1}(B_1 \setminus \overline{B_{1/2}}, |x|^{1-k})}.$$

$\square$

Lemas para demostración de las derivadas

Lema

Sea $n \geq 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función localmente Lipschitz no negativa y no creciente, y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una solución radial semi-estable de* (aP) *satisfaciendo que* $u'(r) > 0$ *para todo* $r \in (0,1)$. *Entonces:*

$$g(u(r)) \leq nc_{n,k} \frac{(u'(r))^k}{r^k}, \quad \forall r \in (0,1] \textit{(no nesesaria la semi-estabilidad).}$$

Además, si g *es convexa,*

$$|g'(u(r))| \leq M_{n,k} \frac{(u'(r))^{k-1}}{r^{k+1}}, \quad \forall r \in (0,1], \tag{5}$$

donde $M_{n,k}$ *es una constante que depende solo de* n *y* k.

Lemas para demostración de las derivadas

Lema

Sea $n \geq 1$, $n \geq k \geq 1$ *y* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *una función radial satisfaciendo que* $u'(r) > 0$ *para todo* $r \in (0,1)$. *Entonces:*

$a)$
$$\max_{t\in[1/2,1]} u'(t) \leq 2^{\frac{2n-k}{k}} \min_{t\in[1/2,1]} u'(t).$$

$b)$
$$\|\nabla u\|_{L^{k+1}(B_1\setminus\overline{B_{1/2}},|x|^{1-k})} \leq 2^{\frac{2n-k}{k}} \min_{t\in[1/2,1]} u'(t).$$

Demostración.

Dado que $\partial_r \left(r^{n-k}(u')^k\right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{k+1}{k}\left(r^{n-k}(u')^k\right)^{\frac{1}{k}} r^{n-1}\tilde{g}(u) \geq 0$, como $u' > 0$ y $g \geq 0$. Para $0 < r \leq 1/2$, se tiene

$$\int_r^{2r} t^{n-k}(u'(t))^{k+1}\,dt \geq r^{n-k+1}(u'(r))^{k+1}\int_1^2 t^{\frac{k-n}{k}}\,dt.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \geq 0$, se tiene que

$$\left(\alpha - \frac{\beta(2n-k)}{k}\right) r^{\alpha-1}(u')^\beta \leq \left(r^\alpha (u')^\beta\right)' \leq \left(\alpha + \frac{\beta(2n-k)}{k}\right) r^{\alpha-1}(u')^\beta,\ \forall r \in (0,1].$$

Luego, fijando $r \in (0,1]$, como $r^\alpha u'(r)$ es no creciente para $\beta = 1$ y $\alpha = -\frac{2n-k}{k}$, se tiene

$$u'(r) \leq D_{n,k}\left(\min_{t\in[1/2,1]} u'(t)\right) r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}-1},\ \forall r \in (0,1].$$

Demostración.

Dado que $\partial_r \left(r^{n-k}(u')^k \right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{k+1}{k} \left(r^{n-k}(u')^k \right)^{\frac{1}{k}} r^{n-1}\tilde{g}(u) \geq 0$, como $u' > 0$ y $g \geq 0$. Para $0 < r \leq 1/2$, se tiene

$$\int_r^{2r} t^{n-k}(u'(t))^{k+1}\, dt \geq r^{n-k+1}(u'(r))^{k+1} \int_1^2 t^{\frac{k-n}{k}}\, dt.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \geq 0$, se tiene que

$$\left(\alpha - \frac{\beta(2n-k)}{k} \right) r^{\alpha-1}(u')^\beta \leq \left(r^\alpha (u')^\beta \right)' \leq \left(\alpha + \frac{\beta(2n-k)}{k} \right) r^{\alpha-1}(u')^\beta, \ \forall r \in (0,1].$$

Luego, fijando $r \in (0,1]$, como $r^\alpha u'(r)$ es no creciente para $\beta = 1$ y $\alpha = -\frac{2n-k}{k}$, se tiene

$$u'(r) \leq D_{n,k} \left(\min_{t\in[1/2,1]} u'(t) \right) r^{\frac{-(k+1)n+2\sqrt{2(k+1)n-4k}+2k^2+6k}{(k+1)^2}-1}, \ \forall r \in (0,1].$$

Ideas demostración derivadas

Demostración.

Dado que $\partial_r \left(r^{n-k} (u')^k \right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{k+1}{k} \left(r^{n-k} (u')^k \right)^{\frac{1}{k}} r^{n-1} \tilde{g}(u) \geq 0$, como $u' > 0$ y $g \geq 0$. Para $0 < r \leq 1/2$, se tiene

$$\int_r^{2r} t^{n-k} (u'(t))^{k+1} \, dt \geq r^{n-k+1} (u'(r))^{k+1} \int_1^2 t^{\frac{k-n}{k}} \, dt.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \geq 0$, se tiene que

$$\left(\alpha - \frac{\beta(2n-k)}{k} \right) r^{\alpha-1} (u')^{\beta} \leq \left(r^{\alpha} (u')^{\beta} \right)' \leq \left(\alpha + \frac{\beta(2n-k)}{k} \right) r^{\alpha-1} (u')^{\beta}, \; \forall r \in (0,1].$$

Luego, fijando $r \in (0,1]$, como $r^{\alpha} u'(r)$ es no creciente para $\beta = 1$ y $\alpha = -\frac{2n-k}{k}$, se tiene

$$u'(r) \leq D_{n,k} \left(\min_{t \in [1/2,1]} u'(t) \right) r^{\frac{-(k+1)n + 2\sqrt{2(k+1)n - 4k} + 2k^2 + 6k}{(k+1)^2} - 1}, \; \forall r \in (0,1].$$

$\square$

Ideas demostración teorema 3 problema adaptado

Demostración.

Sea $r \in (0,1]$,

$$u(1) - u(r) \leq D_{n,k} \left(\min_{t \in [1/2,1]} u'(t) \right) \int_r^1 t^{\delta_{n,k}-1}\, dt,$$

y

$$\int_r^1 t^{\delta_{n,k}-1}\, dt = \begin{cases} \frac{1-r^{\delta_{n,k}}}{\delta_{n,k}} & \text{if } \delta_{n,k} \neq 0 \iff n \neq 2k+8, \\ -\log r & \text{if } \delta_{n,k} = 0 \iff n = 2k+8. \end{cases}$$

Como para $n < 2k+8$, $\delta_{n,k} > 0$ y $1 - r^{\delta_{n,k}} \leq (\delta_{n,k}+1)(1-r)$ para todo $r \in (0,1]$. □

Lemas equivalencia a problema adaptado

Lema

Sea u una solución débil de (kP). Entonces, u es una solución débil de (aP), es decir, $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, $g(u) \in L^1(B_1)$ y

$$c_{n,k} \int_0^1 r^{n-k}(u')^k \varphi' \, dr + \int_0^1 r^{n-1} g(u)\varphi \, dr = 0,$$

para toda función radial $\varphi \in C_c^1(B_1)$.

Lema

Sea u una solución radial semi-estable de (kP). Entonces:

$$Q_u(\xi) = kc_{n,k} \int_{B_1} |x|^{1-k} (u')^{k-1} |\nabla \xi|^2 + \int_{B_1} g'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para toda función radial $\xi \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$.

Lemas equivalencia a problema adaptado

Lema

Sea u *una solución débil de* (kP)*. Entonces,* u *es una solución débil de* (aP)*, es decir,* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$*,* $g(u) \in L^1(B_1)$ *y*

$$c_{n,k} \int_0^1 r^{n-k}(u')^k \varphi' \, dr + \int_0^1 r^{n-1} g(u)\varphi \, dr = 0,$$

para toda función radial $\varphi \in C_c^1(B_1)$*.*

Lema

Sea u *una solución radial semi-estable de* (kP)*. Entonces:*

$$\mathcal{Q}_u(\xi) = kc_{n,k} \int_{B_1} |x|^{1-k} (u')^{k-1} |\nabla \xi|^2 + \int_{B_1} g'(u)\xi^2 \geq 0,$$

para toda función radial $\xi \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$*.*

Ideas demostración problema k-Hessiano

Demostración.

Paso 1. Primero probamos que:

$$\sum_{i,j=1} \frac{x_i x_j S_k^{ij}\left(D^2 u\right)}{|x|^2} = k c_{n,k} \left(\frac{u'}{r}\right)^{k-1}, \; \forall r \in (0,1).$$

Dado cualquier par de funciones radiales φ, ξ, tenemos que:

$$\sum_{i,j=1} \varphi_i \xi_j S_k^{ij}(D^2 u) = \sum_{i,j=1} \left(\frac{x_i x_j S_k^{ij}(D^2 u)}{|x|^2}\right) \varphi' \xi',$$

consiguiendo (28), demostramos las equivalencias de las integrales.

Demostración.

Paso 1. Primero probamos que:

$$\sum_{i,j=1} \frac{x_i x_j S_k^{ij}\left(D^2 u\right)}{|x|^2} = k c_{n,k} \left(\frac{u'}{r}\right)^{k-1}, \ \forall r \in (0,1).$$

Dado cualquier par de funciones radiales φ, ξ, tenemos que:

$$\sum_{i,j=1} \varphi_i \xi_j S_k^{ij}(D^2 u) = \sum_{i,j=1} \left(\frac{x_i x_j S_k^{ij}(D^2 u)}{|x|^2}\right) \varphi' \xi',$$

consiguiendo (28), demostramos las equivalencias de las integrales.

Demostración.

Como

$$u_{ij} = \delta_{i,j}\left(\frac{u'}{r}\right) + \frac{x_i x_j}{r^2}\left(u'' - \frac{u'}{r}\right), \; S_k^{ij}\left(D^2 u\right) = \frac{\sum \left\{\delta\binom{i_1,\cdots,i_{k-1},i}{j_1,\cdots,j_{k-1},j} \prod_{s=1}^{k-1} u_{i_s,j_s}\right\}}{(k-1)!}.$$

Consideramos dos casos:

- Si $r \in (0,1)$ es tal que $u'' - \frac{u'}{r} \neq 0$, desde $(n-k+1)c_{n,k-1} = kc_{n,k}$, $kS_k\left(D^2u\right) = \sum\limits_{i,j=1} u_{ij} S_k^{ij}\left(D^2u\right)$, $\sum\limits_{i=1} S_k^{ii}\left(D^2u\right) = (n-k+1)S_{k-1}\left(D^2u\right)$,

  se tiene:

$$\sum_{i,j=1}\left(\frac{x_i x_j S_k^{ij}\left(D^2u\right)}{r^2}\right) = \frac{\sum\limits_{i,j=1} u_{ij} S_k^{ij}\left(D^2u\right) - \left(\frac{u'}{r}\right)\sum\limits_{i=1} S_k^{ii}\left(D^2u\right)}{u'' - \frac{u'}{r}}$$

$$= kc_{n,k}\left(\frac{u'}{r}\right)^{k-1}.$$

Demostración.

Como

$$u_{ij}=\delta_{i,j}\left(\frac{u'}{r}\right)+\frac{x_i x_j}{r^2}\left(u''-\frac{u'}{r}\right),\ S_k^{ij}\left(D^2u\right)=\frac{\sum\left\{\delta\binom{i_1,\cdots,i_{k-1},i}{j_1,\cdots,j_{k-1},j}\prod_{s=1}^{k-1}u_{i_s,j_s}\right\}}{(k-1)!}.$$

Consideramos dos casos:

- Si $r\in(0,1)$ es tal que $u''-\frac{u'}{r}\neq 0$, desde $(n-k+1)c_{n,k-1}=kc_{n,k}$, $kS_k\left(D^2u\right)=\sum\limits_{i,j=1}u_{ij}S_k^{ij}\left(D^2u\right)$, $\sum\limits_{i=1}S_k^{ii}\left(D^2u\right)=(n-k+1)S_{k-1}\left(D^2u\right)$, se tiene:

$$\sum_{i,j=1}\left(\frac{x_i x_j S_k^{ij}\left(D^2u\right)}{r^2}\right)=\frac{\sum\limits_{i,j=1}u_{ij}S_k^{ij}\left(D^2u\right)-\left(\frac{u'}{r}\right)\sum\limits_{i=1}S_k^{ii}\left(D^2u\right)}{u''-\frac{u'}{r}}$$

$$=kc_{n,k}\left(\frac{u'}{r}\right)^{k-1}.$$

Demostración.

- Si $r \in (0,1)$ es tal que $u'' - \frac{u'}{r} = 0$, desde $S^{ij}\left(D^2 u\right)$, se tiene que $S_k^{ij}\left(D^2 u\right) = 0$ para $i \neq j$ y

$$S_k^{ii}\left(D^2 u\right) = k c_{n,k} \left(\frac{u'}{r}\right)^{k-1}.$$

Paso 2. Luego probamos que $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, se obtiene desde $u \in \Phi_0^k(B_1)$,

$$\|u\|_{W^{1,k+1}(B_1,|x|^{1-k})} \leq C \|u\|_{\Phi_0^k(B_1)}.$$

Demostración.

- Si $r \in (0,1)$ es tal que $u'' - \frac{u'}{r} = 0$, desde $S^{ij}\left(D^2u\right)$, se tiene que $S_k^{ij}\left(D^2u\right) = 0$ para $i \neq j$ y

$$S_k^{ii}\left(D^2u\right) = kc_{n,k}\left(\frac{u'}{r}\right)^{k-1}.$$

Paso 2. Luego probamos que $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, se obtiene desde $u \in \Phi_0^k(B_1)$,

$$\|u\|_{W^{1,k+1}(B_1,|x|^{1-k})} \leq C\,\|u\|_{\Phi_0^k(B_1)}.$$

$\square$

Resultados esenciales problema extremal

Proposición

Sea $u \in \Phi_0^k(B_1)$ *una solución de* (P_λ)*. Se asume que* $\underline{u} < \overline{u}$ *son negativas, acotadas y, sub- y super-solución de* (P_λ)*. Si* u *es un minimizador absoluto de* J_k *en* $\left\{v \in \Phi_0^k(B_1) : \underline{u} \leq v \leq \overline{u}\right\}$*. Entonces,* u *es una solución semi-estable de* (P_λ)*.*

Lema

Si $u \in \Phi_0^k(B_1)$ *es una solución maximal de* (P_λ)*. Entonces,* u *es una solución radial semi-estable.*

Demostración.

Se sigue desde la proposición. □

Resultados esenciales problema extremal

Proposición

Sea $u \in \Phi_0^k(B_1)$ *una solución de* (P_λ). *Se asume que* $\underline{u} < \overline{u}$ *son negativas, acotadas y, sub- y super-solución de* (P_λ). *Si* u *es un minimizador absoluto de* J_k *en* $\left\{ v \in \Phi_0^k(B_1) : \underline{u} \leq v \leq \overline{u} \right\}$. *Entonces,* u *es una solución semi-estable de* (P_λ).

Lema

Si $u \in \Phi_0^k(B_1)$ *es una solución maximal de* (P_λ). *Entonces,* u *es una solución radial semi-estable.*

Demostración.

Se sigue desde la proposición. □

Resultados esenciales problema extremal

Proposición

Sea $u \in \Phi_0^k(B_1)$ *una solución de* (P_λ). *Se asume que* $\underline{u} < \overline{u}$ *son negativas, acotadas y, sub- y super-solución de* (P_λ). *Si* u *es un minimizador absoluto de* J_k *en* $\left\{v \in \Phi_0^k(B_1) : \underline{u} \leq v \leq \overline{u}\right\}$. *Entonces,* u *es una solución semi-estable de* (P_λ).

Lema

Si $u \in \Phi_0^k(B_1)$ *es una solución maximal de* (P_λ). *Entonces,* u *es una solución radial semi-estable.*

Demostración.

Se sigue desde la proposición. $\square$

Ideas demostracion teorema 1 extremal

Demostración.

Paso 1. $u_\lambda \in \Phi_0^k(B_1)$ solución maximal de (P_λ), se sigue desde el principio de comparación y el Lema.

Paso 2. Existencia del parámetro extremal:

$$\lambda^* := \sup\left\{\lambda > 0 : (P_\lambda) \text{ admite una solución } u \in \Phi_0^k(B_1)\right\} < \infty.$$

Se obtiene principalmente desde:

$$\Delta u \geq n\binom{n}{k}^{-1/k}(S_k(D^2u))^{1/k}, \text{ para cada } u \in \Phi^k(B_1),$$

y por la super-linealidad de g.

Ideas demostracion teorema 1 extremal

Demostración.

Paso 1. $u_\lambda \in \Phi_0^k(B_1)$ solución maximal de (P_λ), se sigue desde el principio de comparación y el Lema.

Paso 2. Existencia del parámetro extremal:

$$\lambda^* := \sup\left\{\lambda > 0 : (P_\lambda) \text{ admite una solución } u \in \Phi_0^k(B_1)\right\} < \infty.$$

Se obtiene principalmente desde:

$$\Delta u \geq n \binom{n}{k}^{-1/k} (S_k(D^2 u))^{1/k}, \text{ para cada } u \in \Phi^k(B_1),$$

y por la super-linealidad de g.

Ideas demostracion teorema 1 extremal

Paso 3. $u^* = \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u_\lambda$ es radial y $u^* \in W_0^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ es una solución débil.

Se obtiene por distintas propiedades que $\|u_\lambda\|_{W^{1,k+1}(B_1,|x|^{1-k})}$ es acotada por una constante independiente de λ, así, se sigue desde propiedades de Sobolev y Teorema de Beppo-Levi.

Paso 4. u^* es semi-estable.

Se obtiene principalmente desde

$$\sum \varphi_i \varphi_j S_k^{ij}\left(D^2 u_\lambda\right) \leq D_{n,k}\left(\frac{u'_\lambda}{r}\right)^{k-1} |\nabla \varphi|^2,$$

y Lema de Fatou's. □

Ideas demostracion teorema 1 extremal

Paso 3. $u^* = \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u_\lambda$ es radial y $u^* \in W_0^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ es una solución débil.
Se obtiene por distintas propiedades que $\|u_\lambda\|_{W^{1,k+1}(B_1,|x|^{1-k})}$ es acotada por una constante independiente de λ, así, se sigue desde propiedades de Sobolev y Teorema de Beppo-Levi.
Paso 4. u^* es semi-estable.
Se obtiene principalmente desde

$$\sum \varphi_i \varphi_j S_k^{ij}\left(D^2 u_\lambda\right) \leq D_{n,k}\left(\frac{u_\lambda'}{r}\right)^{k-1} |\nabla \varphi|^2 ,$$

y Lema de Fatou's. $\square$

Ideas demostracion teorema 2 extremal

Demostración.

Teniendo en cuenta que $u_\lambda \in W_0^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ es una solución radial semi-estable de (kP) con $\lambda g(u)$ en lugar de $g(u)$, y dado que los resultados de los teoremas anteriores no dependen de λ, tendiendo $\lambda \to \lambda^*$, se sigue el teorema. $\square$

Familia

Sección inspirada delos resultados obtenidos en [4] para el caso $k = 1$.

Teorema

Sea $h \in (C^1 \cap L^1)(0,1]$ *una función no negativa y consideramos*

$$V(r) = r^{-\lambda}\left(1 + \int_0^r h(s)\,ds\right), \ \ \forall r \in (0,1],$$

donde:

$$\lambda = \frac{(k+1)n - 2\sqrt{2(k+1)n - 4k} - 4k}{k+1}.$$

Definimos:

$$u'(r) := r^{\frac{k-1}{k+1}} (V(r))^{\frac{1}{k+1}}, \ \ \forall r \in (0,1].$$

Entonces, para $n \geq 2k + 8$, $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *es una solución radial semi-estable creciente no acotada de* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$.

Se obtiene desde el siguiente Lema:

Lema

Sea $\beta_1 > -1$, $\beta_2 \in \mathbb{R}$, *y* $V \in C^1(B_1 \setminus \{0\})$ *una función no negativa tal que:*

$$(x, \nabla V) + \mu V \geq 0, \ \forall x \in B_1 \setminus \{0\} \text{ y } (\beta_1 + 1)(n - 2 - \mu) - 2\beta_2 \geq 0.$$

Entonces

$$\int_{B_1} V \left[|\nabla \eta|^2 + \left(\beta_1^2 + 2\beta_1\right) \left(\frac{x}{|x|}, \nabla \eta \right)^2 + \beta_2 \left(\beta_1 + 1\right) \left(\frac{x}{|x|^2}, \nabla \eta^2 \right) \right] \geq \left[\left(\frac{(\beta_1 + 1)(n - 2 - \mu) - 2\beta_2}{2} \right)^2 - \beta_2^2 \right] \int_{B_1} V \frac{\eta^2}{|x|^2}$$

para cada $\eta \in C_c^1(B_1 \setminus \{0\})$.

Signo de u''

Proposición

Sea $\{r_m\} \subset (0,1]$, $\{M_m\} \subset \mathbb{R}^+$ *dos secuencias con* $r_m \downarrow 0$. *Entonces, para* $n \geq 2k+8$, *existe* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, *una solución radial semi-estable no acotada de un problema del tipo* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$, *satisfaciendo*

$$|u''(r_m)| \geq M_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Corolario

Sea $n \geq 2k+8$. *No existe una función* $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}^+$ *con la siguiente propiedad: para cada* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *solución radial semi-estable creciente de un problema del tipo* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$, *existe* $C > 0$ *y* $\epsilon \in (0,1]$ *tal que* $|u''(r)| \leq C\varphi(r)$ *para cada* $r \in (0,\epsilon]$.

Signo de u''

Proposición

Sea $\{r_m\} \subset (0,1]$, $\{M_m\} \subset \mathbb{R}^+$ dos secuencias con $r_m \downarrow 0$. Entonces, para $n \geq 2k+8$, existe $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, una solución radial semi-estable no acotada de un problema del tipo (aP) en $B_1 \setminus \{0\}$ con $g \geq 0$, satisfaciendo

$$|u''(r_m)| \geq M_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Corolario

Sea $n \geq 2k+8$. No existe una función $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}^+$ con la siguiente propiedad: para cada $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ solución radial semi-estable creciente de un problema del tipo (aP) en $B_1 \setminus \{0\}$ con $g \geq 0$, existe $C > 0$ y $\epsilon \in (0,1]$ tal que $|u''(r)| \leq C\varphi(r)$ para cada $r \in (0,\epsilon]$.

Signo de u''

Proposición

Sea $\{r_m\} \subset (0,1]$, $\{M_m\} \subset \mathbb{R}^+$ *dos secuencias con* $r_m \downarrow 0$. *Entonces, para* $n \geq 2k+8$, *existe* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, *una solución radial semi-estable no acotada de un problema del tipo* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$ *y* $g' \leq 0$, *satisfaciendo*

$$|u'''(r_m)| \geq M_m, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Corolario

Sea $n \geq 2k+8$. *No existe una función* $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}^+$ *con la siguiente propiedad: para cada* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *solución radial semi-estable creciente de un problema del tipo* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$ *y* $g' \leq 0$, *existe* $C > 0$ *y* $\epsilon \in (0,1]$ *tal que* $|u'''(r)| \leq C\varphi(r)$ *para cada* $r \in (0, \epsilon]$.

Signo de u''

Proposición

Sea $\{r_m\} \subset (0,1]$, $\{M_m\} \subset \mathbb{R}^+$ *dos secuencias con* $r_m \downarrow 0$. *Entonces, para* $n \geq 2k+8$, *existe* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$, *una solución radial semi-estable no acotada de un problema del tipo* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$ *y* $g' \leq 0$, *satisfaciendo*

$$|u'''(r_m)| \geq M_m, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Corolario

Sea $n \geq 2k+8$. *No existe una función* $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}^+$ *con la siguiente propiedad: para cada* $u \in W^{1,k+1}(B_1, |x|^{1-k})$ *solución radial semi-estable creciente de un problema del tipo* (aP) *en* $B_1 \setminus \{0\}$ *con* $g \geq 0$ *y* $g' \leq 0$, *existe* $C > 0$ *y* $\epsilon \in (0,1]$ *tal que* $|u'''(r)| \leq C\varphi(r)$ *para cada* $r \in (0, \epsilon]$.

Demostración.

Paso 1. $g \geq 0$, se demuestra desde la definición de u' en el Teorema.

Paso 2. Como $n \geq 2k + 8 \Leftrightarrow \delta_{n,k} \leq 0$, se obtiene

$$\frac{|u''(r)|}{r^{\delta_{n,k}-2}} \geq \delta_{n,k} - 1 + \frac{rh(r)}{(k+1)(1 + \int_0^r h(s)\,ds)}.$$

Paso 3. Dadas dos secuencias $\{r_m\} \subset (0,1]$ y $\{y_m\} \subset \mathbb{R}^+$, con $r_m \downarrow 0$, obtenemos que existe una función no negativa $h \in (C^1 \cap L^1)(0,1]$ tal que v satisface $v(r_m) = y_m$ $\left(v(r) = h(r)/\left(1 + \int_0^r h(s)\,ds\right)\right.$ o $\left.h(r) = v(r)\exp\left(\int_0^r v(s)\,ds\right)\right)$. Tomamos

$$y_m = (k+1)\left(\frac{M_m}{r_m^{\delta_{n,k}-1}} + \frac{1-\delta_{n,k}}{r_m}\right).$$

Paso 4. Consideramos $r_m = 1/m$, $M_m = m\varphi(1/m)$ y la proposición. $\square$

Ideas proposición signo u''

Demostración.

Paso 1. $g \geq 0$, se demuestra desde la definición de u' en el Teorema.

Paso 2. Como $n \geq 2k+8 \Leftrightarrow \delta_{n,k} \leq 0$, se obtiene

$$\frac{|u''(r)|}{r^{\delta_{n,k}-2}} \geq \delta_{n,k} - 1 + \frac{rh(r)}{(k+1)(1+\int_0^r h(s)\,ds)}.$$

Paso 3. Dadas dos secuencias $\{r_m\} \subset (0,1]$ y $\{y_m\} \subset \mathbb{R}^+$, con $r_m \downarrow 0$, obtenemos que existe una función no negativa $h \in (C^1 \cap L^1)(0,1]$ tal que v satisface $v(r_m) = y_m$ $\left(v(r) = h(r)/\left(1+\int_0^r h(s)\,ds\right)\right.$ o $\left.h(r) = v(r)\exp\left(\int_0^r v(s)\,ds\right)\right)$. Tomamos

$$y_m = (k+1)\left(\frac{M_m}{r_m^{\delta_{n,k}-1}} + \frac{1-\delta_{n,k}}{r_m}\right).$$

Paso 4. Consideramos $r_m = 1/m$, $M_m = m\varphi(1/m)$ y la proposición. □

Demostración.

Paso 1. $g \geq 0$, se demuestra desde la definición de u' en el Teorema.

Paso 2. Como $n \geq 2k+8 \Leftrightarrow \delta_{n,k} \leq 0$, se obtiene

$$\frac{|u''(r)|}{r^{\delta_{n,k}-2}} \geq \delta_{n,k} - 1 + \frac{rh(r)}{(k+1)(1+\int_0^r h(s)\,ds)}.$$

Paso 3. Dadas dos secuencias $\{r_m\} \subset (0,1]$ y $\{y_m\} \subset \mathbb{R}^+$, con $r_m \downarrow 0$, obtenemos que existe una función no negativa $h \in (C^1 \cap L^1)(0,1]$ tal que v satisface $v(r_m) = y_m$ $(v(r) = h(r)/\left(1+\int_0^r h(s)\,ds\right)$ o $h(r) = v(r)\exp\left(\int_0^r v(s)\,ds\right))$. Tomamos

$$y_m = (k+1)\left(\frac{M_m}{r_m^{\delta_{n,k}-1}} + \frac{1-\delta_{n,k}}{r_m}\right).$$

Paso 4. Consideramos $r_m = 1/m$, $M_m = m\varphi(1/m)$ y la proposición. $\square$

Ideas proposición signo u'''

Demostración.

Similar a la demostración para u'' con restricción sobre la función h. $\square$

Bibliografía I

J. Jacobsen and K. Schmitt.
The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators.
J. Differential Equations, 184(1):283–298, 2002.

M. Navarro and S. Villegas.
Sharp estimates of radial minimizers of p-Laplace equations.
Proc. Amer. Math. Soc., 145(7):2931–2941, 2017.

J. Sánchez and V. Vergara.
Bounded solutions of a k-Hessian equation in a ball.
J. Differential Equations, 261(1):797–820, 2016.

S. Villegas.
Sharp estimates for semi-stable radial solutions of semilinear elliptic equations.
J. Funct. Anal., 262(7):3394–3408, 2012.

X.-J. Wang.
A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals.
Indiana Univ. Math. J., 43(1):25–54, 1994.

⋮

Solo el amor con su ciencia

nos vuelve tan inocentes

⋮

\- Violeta Parra -

Muchas gracias por su atención!

⋮

Solo el amor con su ciencia
nos vuelve tan inocentes

⋮

\- Violeta Parra -

Muchas gracias por su atención!