Solitones ópticos en cristales líquidos nemáticos

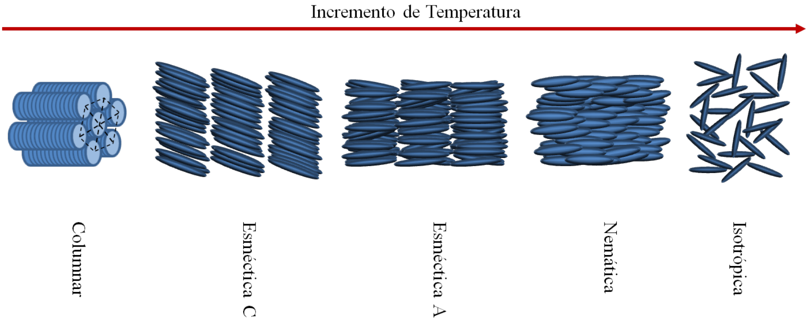
J. P. Borgna, C. S. de la Vega, P. Panayotaros, D. R.

Seminario de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico
Dpto. de Matemática, FCEyN-UBA

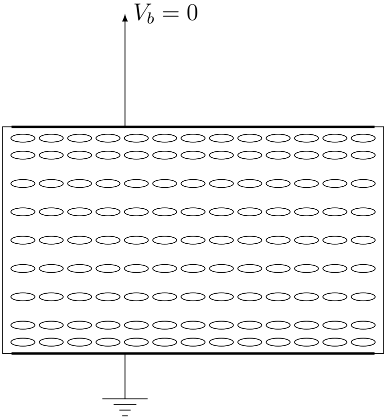
14 de agosto 2018

Cristales líquidos nemáticos

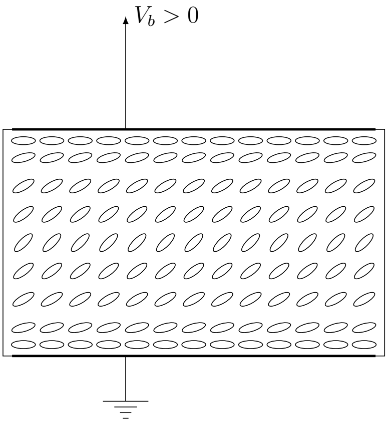
Luis Erick Coy, Universidad de las Américas, Puebla, México



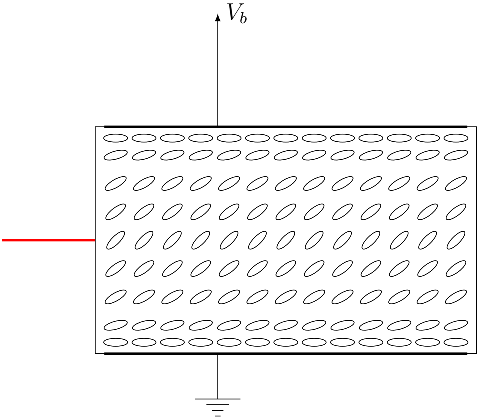
Pulso laser



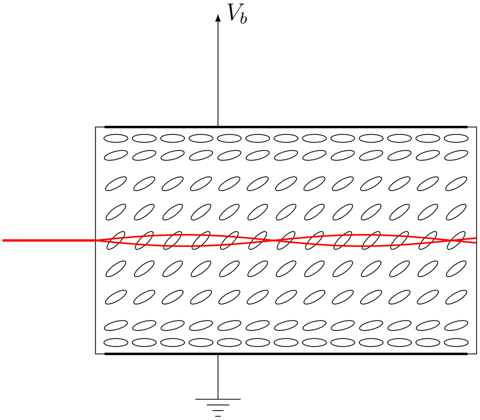
Pulso laser



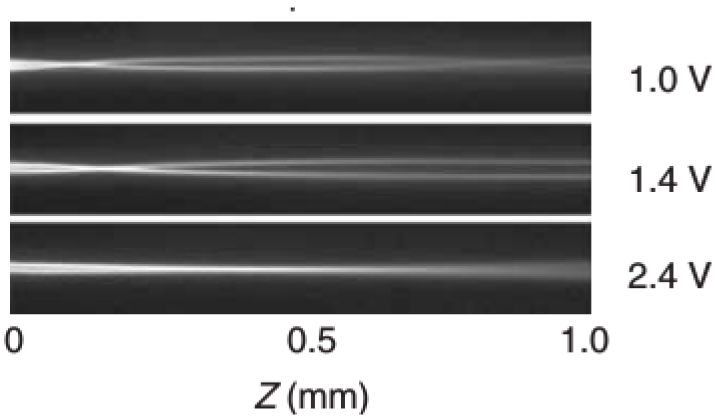
Pulso laser



Pulso laser



G. Assanto, *Nematicons*, Ed. Wiley (2013)



Modelo adimensional

u: envolvente del pulso laser

θ: ángulo de desvío

$$\begin{cases} iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + \sin(2\theta)u = 0, \\ \\ \nu\nabla_x^2\theta - q\sin(2\theta) + 2|u|^2\cos(2\theta) = 0. \end{cases}$$

Si $|\theta| \ll 1$, entonces $\cos(2\theta) \approx 1$ y $\sin(2\theta) \approx 2\theta$.

Energía elástica y electromagnética

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} : \Omega \to \mathbb{S}^2$ $(\mathbb{P}^2)$

- Energía elástica (Oseen–Frank):

$$\mathcal{V} = \frac{K}{2} \int_\Omega \left((\nabla.\mathbf{n})^2 + |\nabla \times \mathbf{n}|^2 \right) dx$$

- Energía electromagnética

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{D}.\mathbf{E}\, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega (\epsilon(x)\mathbf{E}).\mathbf{E}\, dx$$

Energía elástica y electromagnética

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} : \Omega \to \mathbb{S}^2$ ($\mathbb{P}^2$)

- Energía elástica (Oseen–Frank):

$$\mathcal{V} = \frac{K}{2} \int_{\Omega} \left((\nabla . \mathbf{n})^2 + |\nabla \times \mathbf{n}|^2 \right) dx$$

- Energía electromagnética

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{D}.\mathbf{E}\, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon(x)\mathbf{E}).\mathbf{E}\, dx$$

Energía elástica y electromagnética

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} : \Omega \to \mathbb{S}^2$ $(\mathbb{P}^2)$

- Energía elástica (Oseen–Frank):

$$\mathcal{V} = \frac{K}{2} \int_\Omega \left((\nabla . \mathbf{n})^2 + |\nabla \times \mathbf{n}|^2 \right) dx$$

- Energía electromagnética

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbf{D} . \mathbf{E} \, dx = \frac{1}{2} \int_\Omega (\epsilon(x) \mathbf{E}) . \mathbf{E} \, dx$$

Permitividad molecular

- Tensor de permitividad

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

- Vector desplazamiento

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\parallel} + \mathbf{D}_{\perp} = \epsilon_{\parallel}(\mathbf{E}.\mathbf{n})\mathbf{n} + \epsilon_{\perp}(\mathbf{E} - (\mathbf{E}.\mathbf{n})\mathbf{n})$$

- Densidad de energía electromagnética

$$\mathbf{D}.\mathbf{E} = \delta\epsilon(\mathbf{E}.\mathbf{n})^2 + \epsilon_{\perp}\mathbf{E}.\mathbf{E}$$

con $\delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$.

Permitividad molecular

- Tensor de permitividad

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\|} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

- Vector desplazamiento

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\|} + \mathbf{D}_{\perp} = \epsilon_{\|}(\mathbf{E}.\mathbf{n})\mathbf{n} + \epsilon_{\perp}(\mathbf{E} - (\mathbf{E}.\mathbf{n})\mathbf{n})$$

- Densidad de energía electromagnética

$$\mathbf{D}.\mathbf{E} = \delta\epsilon(\mathbf{E}.\mathbf{n})^2 + \epsilon_{\perp}\mathbf{E}.\mathbf{E}$$

con $\delta\epsilon = \epsilon_{\|} - \epsilon_{\perp}$.

Permitividad molecular

- Tensor de permitividad

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\|} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}$$

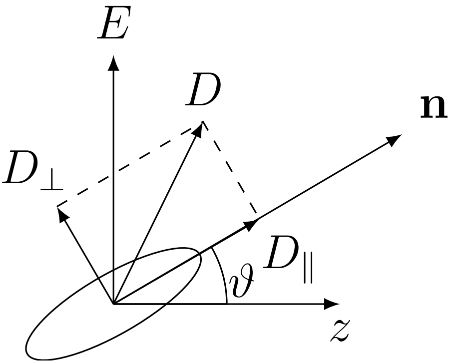
- Vector desplazamiento

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\|} + \mathbf{D}_{\perp} = \epsilon_{\|}(\mathbf{E}.\mathbf{n})\mathbf{n} + \epsilon_{\perp}(\mathbf{E} - (\mathbf{E}.\mathbf{n})\mathbf{n})$$

- Densidad de energía electromagnética

$$\mathbf{D}.\mathbf{E} = \delta\epsilon(\mathbf{E}.\mathbf{n})^2 + \epsilon_{\perp}\mathbf{E}.\mathbf{E}$$

con $\delta\epsilon = \epsilon_{\|} - \epsilon_{\perp}$.


E
D
$\mathbf{n}$
$D_\perp$
$D_\parallel$
ϑ
z

Ecuación del ángulo director

Minimización de la energía total

$$K(\nabla_x^2\vartheta + \vartheta_{zz}) = -\delta\epsilon(E_b^2 + \frac{1}{2}|A|^2)\sin(2\vartheta)$$

ϑ: ángulo entre **n** y z.

E_b: intensidad del campo de polarización.

A: intensidad de laser ($E_L = Ae^{i\omega t} + \mathrm{cc}$).

Ángulo de polarización

- Ecuación para ϑ ($E_L = 0$)

$$\begin{cases} -K\vartheta_{xx} = \delta\epsilon E_b^2 \sin(2\vartheta), \\ \vartheta(\pm d/2) = 0 \end{cases}$$

- $K\vartheta_x^2 - \delta\epsilon E_b^2 \cos(2\vartheta) = \mathcal{E}$
- $E_b > \overline{E}_b = \left(\frac{K\pi}{2d\delta\epsilon}\right)^2$

Ángulo de polarización

- Ecuación para ϑ ($E_L = 0$)

$$\begin{cases} -K\vartheta_{xx} = \delta\epsilon E_b^2 \sin(2\vartheta), \\ \vartheta(\pm d/2) = 0 \end{cases}$$

- $K\vartheta_x^2 - \delta\epsilon E_b^2 \cos(2\vartheta) = \mathcal{E}$
- $E_b > \overline{E}_b = \left(\frac{K\pi}{2d\delta\epsilon}\right)^2$

Ángulo de polarización

- Ecuación para ϑ ($E_L = 0$)

$$\begin{cases} -K\vartheta_{xx} = \delta\epsilon E_b^2 \sin(2\vartheta), \\ \vartheta(\pm d/2) = 0 \end{cases}$$

- $K\vartheta_x^2 - \delta\epsilon E_b^2 \cos(2\vartheta) = \mathcal{E}$
- $E_b > \overline{E}_b = \left(\frac{K\pi}{2d\delta\epsilon}\right)^2$

Ángulo de polarización (cont)

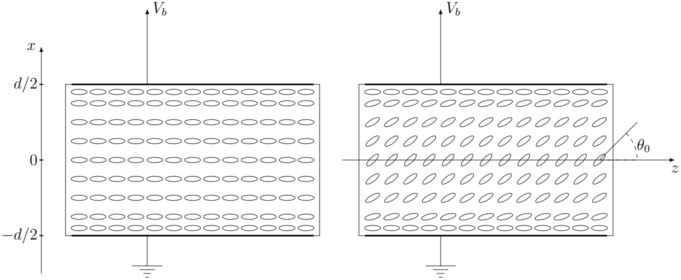


Figura : A la izquierda $E_b < \overline{E}_b$, a la derecha $E_b > \overline{E}_b$.

Ángulo de polarización (cont)

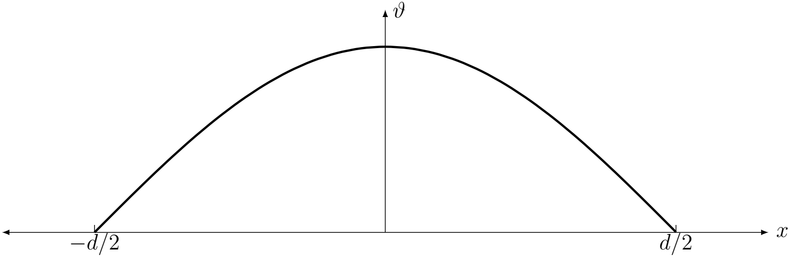


Figura : Ángulo de *pre-tilt* en función de x.

Ecuación del campo

- Ecuación de Maxwell

$$c^2(\nabla_x^2 E + E_{zz}) = D_{tt} = (\delta\epsilon E \sin^2(\vartheta) + \epsilon_\perp E)_{tt}.$$

- Usando $(E \sin^2(\vartheta))_{tt} \approx E_{tt} \sin^2(\vartheta)$

$$c^2(\nabla_x^2 E + E_{zz}) = \frac{n_\perp^2}{c^2}(1 + \alpha \sin^2(\vartheta))E_{tt}$$

con $n_\perp^2 = \epsilon_\perp$ y $\alpha = \delta\epsilon/\epsilon_\perp$.

Ecuación del campo

- Ecuación de Maxwell

$$c^2(\nabla_x^2 E + E_{zz}) = D_{tt} = (\delta\epsilon E \sin^2(\vartheta) + \epsilon_\perp E)_{tt}.$$

- Usando $(E \sin^2(\vartheta))_{tt} \approx E_{tt} \sin^2(\vartheta)$

$$c^2(\nabla_x^2 E + E_{zz}) = \frac{n_\perp^2}{c^2}(1 + \alpha \sin^2(\vartheta))E_{tt}$$

con $n_\perp^2 = \epsilon_\perp$ y $\alpha = \delta\epsilon/\epsilon_\perp$.

Ecuación reescalada

Hay tres escalas de longitudes:

- longitud de onda: ~ 1
- longitud característica transversal: $\varepsilon^{-1/2}$
- longitud característica paralela: $\sim \varepsilon^{-1}$

Ecuación reescalada

Hay tres escalas de longitudes:

- longitud de onda: ~ 1
- longitud característica transversal: $\varepsilon^{-1/2}$
- longitud característica paralela: $\sim \varepsilon^{-1}$

Ecuación reescalada

Hay tres escalas de longitudes:

- longitud de onda: ~ 1
- longitud característica transversal: $\varepsilon^{-1/2}$
- longitud característica paralela: $\sim \varepsilon^{-1}$

Ecuación reescalada

Hay tres escalas de longitudes:

- longitud de onda: ~ 1
- longitud característica transversal: $\varepsilon^{-1/2}$
- longitud característica paralela: $\sim \varepsilon^{-1}$

Ecuación reescalada

Hay tres escalas de longitudes:

- longitud de onda: ~ 1
- longitud característica transversal: $\varepsilon^{-1/2}$
- longitud característica paralela: $\sim \varepsilon^{-1}$

$$E(x, z, t) = E_b + A(\sqrt{\varepsilon}x, \varepsilon z, \varepsilon t)e^{i(kz-\omega t)} + cc$$

Cambio de variables: $\sqrt{\varepsilon}x \mapsto x$, $\varepsilon z \mapsto z$, $\varepsilon t \mapsto t$, $\theta = \vartheta - \theta_0$ y $u = A/E_b$

Ecuación reescalada

Hay tres escalas de longitudes:

- longitud de onda: ~ 1
- longitud característica transversal: $\varepsilon^{-1/2}$
- longitud característica paralela: $\sim \varepsilon^{-1}$

$$E(x,z,t) = E_b + A(\sqrt{\varepsilon}x, \varepsilon z, \varepsilon t)e^{i(kz-\omega t)} + cc$$

Cambio de variables: $\sqrt{\varepsilon}x \mapsto x$, $\varepsilon z \mapsto z$, $\varepsilon t \mapsto t$, $\theta = \vartheta - \theta_0$ y $u = A/E_b$

$$\begin{cases} iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + \sin(2\theta)u \approx 0, \\ \\ \nu\nabla_x^2\theta - q\sin(2\theta) + 2|u|^2\cos(2\theta) \approx 0. \end{cases}$$

Modelo linealizado

P. Panayotaros and T. R. Marchant, 2014

$$\begin{cases} iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + 2\theta u = 0, \\ \\ \nabla_x^2\theta - \frac{2q}{\nu}\theta + \frac{2}{\nu}|u|^2 = 0, \end{cases}$$

donde q, ν son constantes positivas, $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\theta(x) = G(|u|^2)(x) = \frac{2}{\nu}\int_{\mathbb{R}^2} N_0(\sqrt{2q/\nu}(x-y))|u(y)|^2 dy$$

N_0: función de Bessel modificada.

Modelo linealizado (cont)

$$iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + 2G(|u|^2)u = 0,$$

Conservación de la *potencia P*

$$P(u) = \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx$$

El sistema es hamiltoniano

$$u_z = -i\frac{\delta H}{\delta u^*}$$

donde

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2}|\nabla_x u(x)|^2 - G(|u|^2)|u|^2\right) dx$$

Resultados

- Buen planteo (existencia, unicidad y dependencia continua) del problema de valores iniciales

$$u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$$

$\|u(z)\|_{H^1} \leq M(u_0)$ para $z \in \mathbb{R}$.

- Existencia de soluciones estacionarias:

$$u(x, z) = e^{-i\omega z}\psi(x)$$

Si $P(\psi) = \lambda$ es suficientemente grande.

Resultados

- Buen planteo (existencia, unicidad y dependencia continua) del problema de valores iniciales

$$u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}^2))$$

$\|u(z)\|_{H^1} \leq M(u_0)$ para $z \in \mathbb{R}$.

- Existencia de soluciones estacionarias:

$$u(x, z) = e^{-i\omega z}\psi(x)$$

Si $P(\psi) = \lambda$ es suficientemente grande.

Resultados (cont)

- ψ es solución del problema variacional

$$H(\psi) = \text{mín}\{H(u) : \text{ sujeto a } P(u) = \lambda\}$$

- Si $P(u_0) = \lambda < \lambda_0$, entonces

$$\|u(z)\|_{L^4} \to 0,$$

por lo tanto no existen soluciones estacionarias de baja potencia.

Resultados (cont)

- ψ es solución del problema variacional

$$H(\psi) = \text{mín}\{H(u): \text{ sujeto a } P(u) = \lambda\}$$

- Si $P(u_0) = \lambda < \lambda_0$, entonces

$$\|u(z)\|_{L^4} \to 0,$$

por lo tanto no existen soluciones estacionarias de baja potencia.

Problema Schrödinger–Poisson

- Acoplamiento S–P

$$\begin{cases} iu_z + \nabla_x^2 u + Vu + f(|u|^2)u = 0, \\ \nabla_x^2 V = D(x) + A|u(x)|^2, \end{cases}$$

$$V = K * \left(D + A|u|^2\right)$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, $K \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ por lo tanto se puede usar teoría clásica.

- Para $n = 1, 2$, K no es acotado
- H. Steinrück (1991) y H. P. Stimming (2005): caso unidimensional asumiendo fuerte decaimiento en ∞.

Problema Schrödinger–Poisson

- Acoplamiento S–P

$$\begin{cases} iu_z + \nabla_x^2 u + Vu + f(|u|^2)u = 0, \\ \nabla_x^2 V = D(x) + A|u(x)|^2, \end{cases}$$

$$V = K * (D + A|u|^2)$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, $K \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ por lo tanto se puede usar teoría clásica.

- Para $n = 1, 2$, K no es acotado
- H. Steinrück (1991) y H. P. Stimming (2005): caso unidimensional asumiendo fuerte decaimiento en ∞.

Problema Schrödinger–Poisson

- Acoplamiento S–P

$$\begin{cases} iu_z + \nabla_x^2 u + Vu + f(|u|^2)u = 0, \\ \nabla_x^2 V = D(x) + A|u(x)|^2, \end{cases}$$

$$V = K * (D + A|u|^2)$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, $K \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$ por lo tanto se puede usar teoría clásica.

- Para $n = 1, 2$, K no es acotado
- H. Steinrück (1991) y H. P. Stimming (2005): caso unidimensional asumiendo fuerte decaimiento en ∞.

Problema Schrödinger–Poisson (cont)

- M. De Leo and D. R. (2007): caso unidimensional en el espacio de energías

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} |\nabla_x u(x)|^2 - F(|u|^2) \right) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |x-y| |u(y)|^2 |u(x)|^2 dx dy$$

- S. Masaki (2011): caso bidimensional $K(x) = \log(|x|)$.

Problema Schrödinger–Poisson (cont)

- M. De Leo and D. R. (2007): caso unidimensional en el espacio de energías

$$H(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} |\nabla_x u(x)|^2 - F(|u|^2) \right) dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} |x-y| |u(y)|^2 |u(x)|^2 dxdy$$

- S. Masaki (2011): caso bidimensional $K(x) = \log(|x|)$.

Problema de valores iniciales

$u(x,z) \in \mathbb{C}$ y $\theta(x,z) \in [0,\pi/4]$ para $(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + \sin(2\theta)u = 0, \\ \\ \nu\nabla_x^2\theta - q\sin(2\theta) + 2|u|^2\cos(2\theta) = 0, \end{cases}$$

$u(x, z = 0) = u_0(x)$ para $x \in \mathbb{R}^2$.

Idea del planteo

- Despejar $\theta = \theta(|u|^2)$ de la ecuación no lineal y resolver

$$
\begin{aligned}
& iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + \sin(2\theta(|u|^2))u = 0, \\
& u(x, z = 0) = u_0(x),
\end{aligned}
$$

- $\theta \geq 0$ y $\theta \to \pi/4$ si $|u|^2 \to \infty$

Idea del planteo

- Despejar $\theta = \theta(|u|^2)$ de la ecuación no lineal y resolver

$$
\begin{aligned}
&iu_z + \frac{1}{2}\nabla_x^2 u + \sin(2\theta(|u|^2))u = 0,\\
&u(x, z = 0) = u_0(x),
\end{aligned}
$$

- $\theta \geq 0$ y $\theta \to \pi/4$ si $|u|^2 \to \infty$

Ecuación elíptica

- N operador de Nemytskii con $N(u,.)$ decreciente en el intervalo $[0,\pi/4]$

$$-\nabla_x^2\theta = N(u,\theta) = -\frac{q}{\nu}\sin(2\theta) + \frac{2}{\nu}|u|^2\cos(2\theta)$$

- Por principio del máximo: existe a lo sumo $\theta \in H^2(\mathbb{R}^2)$ con $0 \le \theta \le \pi/4$

$$\|\theta\|_{H^2} \le C\|u\|_{L^4}^2.$$

- Si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$0 \le \theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\|u\|_{L^\infty}^2}{q}\right)$$

Ecuación elíptica

- N operador de Nemytskii con $N(u,.)$ decreciente en el intervalo $[0, \pi/4]$

$$-\nabla_x^2\theta = N(u,\theta) = -\frac{q}{\nu}\sin(2\theta) + \frac{2}{\nu}|u|^2\cos(2\theta)$$

- Por principio del máximo: existe a lo sumo $\theta \in H^2(\mathbb{R}^2)$ con $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$\|\theta\|_{H^2} \leq C\|u\|_{L^4}^2.$$

- Si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$0 \leq \theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\|u\|_{L^\infty}^2}{q}\right)$$

Ecuación elíptica

- N operador de Nemytskii con $N(u, .)$ decreciente en el intervalo $[0, \pi/4]$

$$-\nabla_x^2\theta = N(u,\theta) = -\frac{q}{\nu}\sin(2\theta) + \frac{2}{\nu}|u|^2\cos(2\theta)$$

- Por principio del máximo: existe a lo sumo $\theta \in H^2(\mathbb{R}^2)$ con $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$\|\theta\|_{H^2} \leq C\|u\|_{L^4}^2.$$

- Si $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$0 \leq \theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\|u\|_{L^\infty}^2}{q}\right)$$

Ecuación elíptica (cont)

- Existencia por continuación:

$$\mathcal{U} = \{u \in L^4 \cap L^\infty : -\nabla_x^2 \theta = N(u, \theta) \text{ tiene solución}\},$$

$\mathcal{U}$ es no vacío, cerrado y abierto.

- $\mathcal{U}$ es no vacío: si $u = 0 \in \mathcal{U}$, $\theta = 0$ es solución.
- $\mathcal{U}$ es cerrado: si $u_n \to u$, $\theta_n \rightharpoonup \theta$ en $H^2(\mathbb{R}^2)$, $\theta_n \rightrightarrows \theta$.

Ecuación elíptica (cont)

- Existencia por continuación:

$$\mathcal{U} = \{u \in L^4 \cap L^\infty : -\nabla_x^2 \theta = N(u, \theta) \text{ tiene solución}\},$$

$\mathcal{U}$ es no vacío, cerrado y abierto.

- $\mathcal{U}$ es no vacío: si $u = 0 \in \mathcal{U}$, $\theta = 0$ es solución.
- $\mathcal{U}$ es cerrado: si $u_n \to u$, $\theta_n \rightharpoonup \theta$ en $H^2(\mathbb{R}^2)$, $\theta_n \rightrightarrows \theta$.

Ecuación elíptica (cont)

- Existencia por continuación:

$$\mathcal{U} = \{u \in L^4 \cap L^\infty : -\nabla_x^2 \theta = N(u,\theta) \text{ tiene solución}\},$$

  $\mathcal{U}$ es no vacío, cerrado y abierto.

- $\mathcal{U}$ es no vacío: si $u = 0 \in \mathcal{U}$, $\theta = 0$ es solución.
- $\mathcal{U}$ es cerrado: si $u_n \to u$, $\theta_n \rightharpoonup \theta$ en $H^2(\mathbb{R}^2)$, $\theta_n \rightrightarrows \theta$.

Ecuación elíptica (cont)

- Existencia por continuación:

$$\mathcal{U} = \{u \in L^4 \cap L^\infty : -\nabla_x^2 \theta = N(u, \theta) \text{ tiene solución}\},$$

  $\mathcal{U}$ es no vacío, cerrado y abierto.
- $\mathcal{U}$ es no vacío: si $u = 0 \in \mathcal{U}$, $\theta = 0$ es solución.
- $\mathcal{U}$ es cerrado: si $u_n \to u$, $\theta_n \rightharpoonup \theta$ en $H^2(\mathbb{R}^2)$, $\theta_n \rightrightarrows \theta$.

Ecuación elíptica (cont)

$\mathcal{U}$ es abierto:

- Si $\tilde{u} = u + v$ y $\tilde{\theta} = \theta + \psi$

$$-\nabla_x^2 \psi + V(u, \theta)\psi = F(u, v, \theta, \psi)$$

- $V \geq 0$ y

$$\liminf_{|x| \to \infty} V(x) \geq \frac{2q}{\nu}$$

- ψ es punto fijo de $\psi = (-\nabla_x^2 + V(u, \theta))^{-1} F(u, v, \theta, \psi)$

Ecuación elíptica (cont)

$\mathcal{U}$ es abierto:

- Si $\tilde{u} = u + v$ y $\tilde{\theta} = \theta + \psi$

$$-\nabla_x^2 \psi + V(u, \theta)\psi = F(u, v, \theta, \psi)$$

- $V \geq 0$ y

$$\liminf_{|x| \to \infty} V(x) \geq \frac{2q}{\nu}$$

- ψ es punto fijo de $\psi = (-\nabla_x^2 + V(u, \theta))^{-1} F(u, v, \theta, \psi)$

Ecuación elíptica (cont)

$\mathcal{U}$ es abierto:

- Si $\tilde{u} = u + v$ y $\tilde{\theta} = \theta + \psi$

$$-\nabla_x^2 \psi + V(u, \theta)\psi = F(u, v, \theta, \psi)$$

- $V \geq 0$ y

$$\liminf_{|x| \to \infty} V(x) \geq \frac{2q}{\nu}$$

- ψ es punto fijo de $\psi = (-\nabla_x^2 + V(u, \theta))^{-1} F(u, v, \theta, \psi)$

Resultados

- $Y = \{u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2)) : \nabla_x u \in L^4(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^2))\}$
- $u \in L^q(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^2))$
- $\theta = \theta(u) \in L^4(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^2))$
- Existencia local mediante estimaciones de Strichartz

$$u(z) = e^{i\frac{z}{2}\nabla_x^2} u_0 + \int_0^z e^{i\frac{z-z'}{2}\nabla_x^2} \sin(2\theta(z'))u(z')dz'$$

Resultados (cont)

- Conservación de la potencia: $P(u) = \|u\|_{L^2}^2$
- Hamiltoniano

$$H(u,\theta) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x u|^2 + \nu|\nabla_x\theta|^2 - 2|u|^2\sin(2\theta) + q(1-\cos(2\theta))dx$$

- Conservación

$$\frac{dH}{dz} = \left(\partial_u H, \frac{du}{dz}\right) + \left(\partial_\theta H, \frac{d\theta}{dz}\right) = 0$$

Resultados (cont)

- Usando que

$$H(u,\theta) \geq \frac{1}{4}\|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2$$

se obtiene $\|u\|_{H^1}^2 \leq 4H(u,\theta) + 3\|u\|_{L^2}^2$.

- Existencia global
- Si $\|u\|_{L^2}^2 < \bar{\lambda}$, entonces $\|u\|_{L^4(\mathbb{R},L^4)}^4 < \infty$.

Soluciones estacionarias

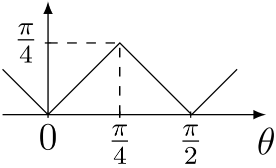
Problema variacional

$$S_\lambda = \{(u, \theta) \in H^1(\mathbb{R}^2) \times H^1(\mathbb{R}^2) : P(u) = \lambda\}$$

$$I_\lambda = \inf_{(u,\theta)\in S_\lambda} H(u, \theta)$$

Soluciones estacionarias (cont)

Si P es la función:



$$H(|u|, P(\theta)) \leq H(u, \theta)$$

Por lo tanto $u \geq 0$ y $\theta \in [0, \pi/4]$.

Soluciones estacionarias (cont)

Teorema

Existe $\bar{\lambda} > 0$ *tal que*

- *Si* $0 < \lambda < \bar{\lambda}$, *entonces* $I_\lambda = 0$,
- *Si* $\lambda > \bar{\lambda}$, $I_\lambda < 0$,
- I_λ *es decreciente en* $(\bar{\lambda}, \infty)$,
- *Si* $\lambda > \bar{\lambda}$, *existe* $(u_\lambda, \theta_\lambda) \in S_\lambda$ *que realiza el ínfimo.*

$u_\lambda, \theta_\lambda$ se pueden elegir radiales.

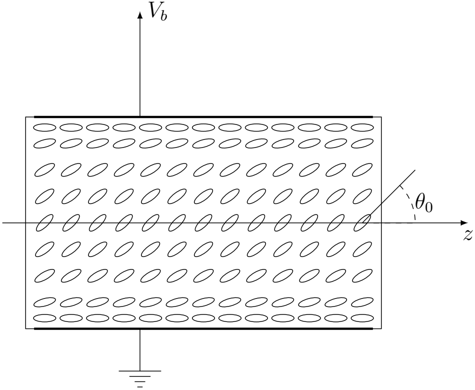
Problema de valores iniciales

$u(x,z) \in \mathbb{C}$ y $\psi(x,z) \in [0, \pi/2 - \theta_0]$ para $(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$
\begin{cases}
\partial_z u = \frac{1}{2}\mathrm{i}\Delta u + \mathrm{i}\gamma(\sin^2(\psi + \theta_0) - \sin^2(\theta_0))u, \\
\\
\nu\psi = \frac{1}{2}E_0^2 \sin(2\theta_0) - \frac{1}{2}(E_0^2 + |u|^2) \sin(2(\psi + \theta_0)),
\end{cases}
$$

$u(x, z = 0) = u_0(x)$ para $x \in \mathbb{R}^2$.

Ángulo de polarización



Buen planteo

Teorema

Dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$*, existe un único par* (u, ψ) *solución del problema de evolución, donde:*
$u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^2))$, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^2))$ *con*
$\psi \in [0, \pi/2 - \theta_0]$ *y* $\nabla u \in L^4_{loc}(\mathbb{R}, L^4(\mathbb{R}^2))$.

Cantidades conservadas

- Conservación de la potencia: $P(u) = \|u\|_{L^2}^2$
- Hamiltoniano

$$H(u,\psi) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x u|^2 + \nu|\nabla_x \psi|^2 + F(\theta_0,\psi,|u|^2)dx$$

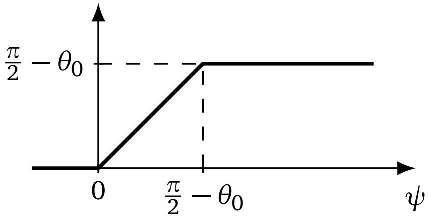
$$F(\theta_0,\psi,|u|^2) = \gamma\Big(E_0^2 h(\theta_0,\psi) - \big(\sin^2(\theta_0+\psi) - \sin^2(\theta_0)\big)\,|u|^2\Big)$$
$$h(\theta_0,\psi) = \sin^2(\theta_0) - \sin^2(\theta_0+\psi) + \sin(2\theta_0)\psi$$

- Conservación del Hamiltoniano

$$\frac{dH}{dz} = \left(\partial_u H, \frac{du}{dz}\right) + \left(\partial_\theta H, \frac{d\theta}{dz}\right) = 0$$

Soluciones estacionarias (cont)

Si P es la función:



$$H(|u|, P(\psi)) \leq H(u, \psi), \text{ si } \psi \in [-\varepsilon, \infty).$$

Por lo tanto $u \geq 0$ y $\psi \in [0, \pi/2 - \theta_0]$.