# El modelo de Keen

Nahuel Arca

17 de mayo de 2018

Los modelos aquí presentados son de tipo “Stock-Flow consistent”[GL16]. Esto quiere decir que inicialmente se plantean dos tablas, en las cuales las columnas representan cuentas de distintos sectores. La primera tabla es el balance general de la economía, es decir, una foto de que posee cada sector a tiempo $t$. La segunda tabla son las transacciones que se dan por unidad de tiempo entre los distintos sectores. Exceptuando las filas de producción y depreciación, las otras transacciones tienen que sumar cero tanto en términos de dinero (\$) como en términos de bienes tangibles ($C$).

## 1. El modelo de Goodwin

| | Familias | | Firmas | |
|---|---|---|---|---|
| Balance general | \$ | C | \$ | C |
| Bienes | 0 | ? | 0 | $K(t)$ |
| Dinero | $D(t)$ | 0 | $-D(t)$ | 0 |
| | | | | |
| Transacciones | | | | |
| Producción | 0 | 0 | 0 | $Y(t)$ |
| Salarios | $+W(t)$ | 0 | $-W(t)$ | 0 |
| Consumo | $-C(t)$ | $+C(t)$ | $+C(t)$ | $-C(t)$ |
| Depreciación | 0 | ? | 0 | $-\delta K(t)$ |

De aquí se deriva

$$\dot{D} = W - C$$
$$\dot{K} = Y - C - \delta K$$

En [Goo82], Goodwin asume que los trabajadores no ahorran ($D = 0$). Además, que para producir $Y(t)$ por unidad de tiempo, se requiere $\nu Y(t)$ capital, y que todo el capital se utiliza:

$$Y(t) = \frac{K(t)}{\nu}$$

Luego

$$\dot{Y} = \frac{Y - W}{\nu} - \delta Y$$

Si $w$ es el salario por unidad de tiempo y $L$ es el número de trabajadores ocupados, se tiene que

$$W(t) = w(t)L(t)$$
$$L(t) = \frac{Y(t)}{a(t)}$$

donde $a$ está dada por el progreso tecnológico, que se asume crece de forma estable

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \alpha > 0$$

Sea $N(t)$ la mano de obra, se define la ocupación como

$$\lambda(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$$

También se asume crecimiento estable para la mano de obra

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \beta > 0$$

y asume que la tasa de cambio de los salarios es una función creciente de la ocupación

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \Phi(\lambda)$$

Se tiene entonces que la relación entre salarios y producto interno bruto está dada por

$$\omega(t) = \frac{W(t)}{Y(t)} = \frac{w(t)}{a(t)}$$

Luego

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} = \Phi(\lambda) - \alpha \tag{1}$$

$$\mu(\omega(t)) = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{1-\omega(t)}{\nu} - \delta \tag{2}$$

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \mu(\omega(t)) - \alpha - \beta \tag{3}$$

Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \omega(\Phi(\lambda) - \alpha) \\ \dot{\lambda} &= \lambda\left(\frac{1-\omega}{\nu} - \alpha - \beta - \delta\right) \end{aligned}$$

En el paper original, Goodwin toma

$$\Phi(\lambda) = \phi_1\lambda - \phi_0$$

con $\phi_0, \phi_1 > 0$, y le quedan ecuaciones de Lotka-Volterra en las que la porción de los salarios asumen el rol de predador, mientras que la ocupación asume el rol de presa, asumiendo la condición

$$\frac{1}{\nu} - \alpha - \beta - \delta > 0$$

Dado que se debería tener la restricción $0 \leq \lambda \leq 1$, en [Des+06] se sugiere tomar $\Phi$ de clase $C^1$ en $(0,1)$ y continua en $[0,1)$ que cumpla[1]

$$\begin{aligned} \Phi' &> 0 \\ \Phi(0) &< \alpha \\ \lim_{\lambda\to 1^-} \Phi(\lambda) &= \infty \end{aligned}$$

En cuanto a la restricción $\omega \leq 1$, será innecesaria en el siguiente modelo que incorpora bancos.

Es fácil ver que este modelo tiene dos equilibrios:

- Un equilibrio inestable en $(0,0)$.
- Un equilibrio estable en el sentido de Lyapunov en $(1-\nu(\alpha+\beta+\delta), \Phi^{-1}(\alpha))$. El crecimiento en este punto es $\alpha+\beta$.

[1] Ninguno de los trabajos citados comenta si se puede alcanzar $\lambda = 1$ en tiempo finito, ni cómo se interpretaría esto. Esto pasa si vale que $\Phi \in L^1([0,1])$. Por ejemplo, tomando $\Phi(s) = -\log(1-s)$.

# 2. El modelo de Keen

| | Familias | | Firmas | | Bancos |
|---|---|---|---|---|---|
| Balance general | $ | C | $ | C | $ |
| Bienes | 0 | ? | 0 | $K(t)$ | 0 |
| Depósitos | $+M_h(t)$ | 0 | $+M_f(t)$ | 0 | $-M(t)$ |
| Préstamos | $-L_h(t)$ | 0 | $-L_f(t)$ | 0 | $+L(t)$ |
| | | | | | |
| Transacciones | | | | | |
| Producción | 0 | 0 | 0 | $Y(t)$ | 0 |
| Salarios | $+W(t)$ | 0 | $-W(t)$ | 0 | 0 |
| Consumo | $-C(t)$ | $+C(t)$ | $+C(t)$ | $-C(t)$ | 0 |
| Depreciación | 0 | ? | 0 | $-\delta K(t)$ | 0 |
| Depósitos | $+r_M M_h(t)$ | 0 | $+r_M M_f(t)$ | 0 | $-r_M M(t)$ |
| Préstamos | $-r_L L_h(t)$ | 0 | $-r_L L_f(t)$ | 0 | $+r_L L(t)$ |

$$
\begin{aligned}
\dot{M}_h - \dot{L}_h &= W - C + r_M M_h - r_L L_h \\
\dot{M}_f - \dot{L}_f &= -W + C + r_M M_f - r_L L_f \\
\dot{K} &= Y - C - \delta K
\end{aligned}
$$

En [Kee95], Keen asume que hay una única tasa de interés $(r = r_M = r_L)$[2]. Tomando $D = L_f - M_f$, e $Y - C = \kappa(\pi)Y$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\dot{D} &= W + \kappa(\pi)Y - Y + rD \\
\dot{K} &= \kappa(\pi)Y - \delta K
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\pi Y &= Y - W - rD \\
\pi &= 1 - \omega - rd
\end{aligned}
$$

Luego

[2] Keen considera que $r$ es una función lineal de $d$, pero en [GL12], $r$ se toma constante. Asumiremos esto último, con el adicional $r > 0$, para simplificar la exposición.

$$\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)} = \Phi(\lambda) - \alpha \tag{4}$$

$$\pi(t) = 1 - \omega(t) - rd(t) \tag{5}$$

$$\mu(\pi(t)) = \frac{\kappa(\pi(t))}{\nu} - \delta \tag{6}$$

$$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \mu(\pi(t)) - \alpha - \beta \tag{7}$$

$$\frac{\dot{d}(t)}{d(t)} = \frac{\omega(t) - 1 + \kappa(\pi(t))}{d(t)} + r - \mu(\pi(t)) \tag{8}$$

Se tiene entonces el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \omega(\Phi(\lambda) - \alpha) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\frac{\kappa(1-\omega-rd)}{\nu} - \alpha - \beta - \delta\right) \\
\dot{d} &= d\left(r - \frac{\kappa(1-\omega-rd)}{\nu} + \delta\right) + \kappa(1-\omega-rd) - (1-\omega)
\end{aligned}$$

En [Min16], Minsky señala que cuando las ganancias son grandes, las firmas toman deuda para invertir más, mientras que cuando las ganancias son pequeñas, las firmas reducen sus deudas invirtiendo menos. Luego, asumiremos que $\kappa$ cumple las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\kappa' &> 0 \\
0 \leq \lim_{\pi \to -\infty} \kappa(\pi) &< \nu(\min\{r, \alpha+\beta\} + \delta) \\
\nu(\alpha+\beta+\delta) &< \lim_{\pi \to +\infty} \kappa(\pi) \leq 1 \\
\lim_{\pi \to \infty} \pi^2 \kappa'(\pi) &< \infty
\end{aligned}$$

Los equilibrios finitos (y estructuralmente estables) de este sistema son:

- $(0, 0, d_0)$ donde $d_0$ cumple

  $$d_0\left(r - \frac{\kappa(1-rd_0)}{\nu} + \delta\right) + \kappa(1-rd_0) - 1 = 0$$

  Para que este tipo de equilibrios sean estables, se necesita que

  $$\nu(r+\delta) + (1 - \pi_0 - r\nu)\kappa'(\pi_0) < \kappa(\pi_0) < \nu(\alpha+\beta+\delta)$$

  donde $\pi_0 = 1 - rd_0$. Notar que si $\pi_0 \to -\infty$, no vale la primera desigualdad, mientras que si $\pi_0 \to +\infty$, no vale la segunda.

- $(\omega_1, \Phi^{-1}(\alpha), d_1)$ donde $\omega_1$ y $d_1$ son

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \kappa^{-1}(\nu(\alpha+\beta+\delta)) \\
\omega_1 &= 1-\pi_1 - r\frac{\nu(\alpha+\beta+\delta)-\pi_1}{\alpha+\beta} \\
d_1 &= \frac{\nu(\alpha+\beta+\delta)-\pi_1}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Este equilibrio es estable si

$$\frac{\kappa'(\pi_1)}{\nu}(\pi_1-\nu\delta) > \alpha+\beta$$

De lo que se deduciría que

$$\pi_1 > \nu\delta$$

y $\kappa'(\pi_1)$ es suficientemente grande.
El crecimiento en este punto es $\alpha+\beta$.

Pero también hay equilibrios en $(0,0,\pm\infty)^3$, que se puede analizar haciendo el cambio de variables $u = 1/d$:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \omega(\Phi(\lambda)-\alpha) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\frac{\kappa(1-\omega-r/u)}{\nu}-\alpha-\beta-\delta\right) \\
\dot{u} &= u\left(\frac{\kappa(1-\omega-r/u)}{\nu}-r-\delta\right)-u^2\left(\kappa(1-\omega-r/u)-(1-\omega)\right)
\end{aligned}$$

Este equilibrio es estable si

$$\lim_{\pi\to\mp\infty}\kappa(\pi) < \nu(r+\delta)$$

El crecimiento en estos equilibrios es

$$\lim_{\pi\to\mp\infty}\frac{\kappa(\pi)}{\nu}-\delta$$

Notar que en el caso $d=-\infty$, para que el equilibrio sea estable, todo crecimiento ecónomico tiene que ser menor a la tasa de interés.

[3] En [GL12] y [Lim+14] sólo se menciona el equilibrio $(0,0,+\infty)$.

## 3. El modelo de Lima

| Balance general | Familias $ | Familias C | Firmas $ | Firmas C | Bancos $ | Gobierno $ | Gobierno C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bienes | 0 | ? | 0 | $K(t)$ | 0 | 0 | ? |
| Depósitos | $+M_h(t)$ | 0 | $+M_f(t)$ | 0 | $-M(t)$ | 0 | 0 |
| Préstamos | $-L_h(t)$ | 0 | $-L_f(t)$ | 0 | $+L(t)$ | 0 | 0 |
| Bonos | $+B_h(t)$ | 0 | $+B_f(t)$ | 0 | $+B_b(t)$ | $-B(t)$ | 0 |
| Transacciones | | | | | | | |
| Producción | 0 | 0 | 0 | $Y(t)$ | 0 | 0 | 0 |
| Salarios | $+W(t)$ | 0 | $-W(t)$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Consumo | $-C(t)$ | $+C(t)$ | $+C(t)$ | $-C(t)$ | 0 | 0 | 0 |
| Gasto público | 0 | 0 | $+G(t)$ | $-G(t)$ | 0 | $-G(t)$ | $+G(t)$ |
| Depreciación | 0 | ? | 0 | $-\delta K(t)$ | 0 | 0 | ? |
| Depósitos | $+r_M M_h(t)$ | 0 | $+r_M M_f(t)$ | 0 | $-r_M M(t)$ | 0 | 0 |
| Préstamos | $-r_L L_h(t)$ | 0 | $-r_L L_f(t)$ | 0 | $+r_L L(t)$ | 0 | 0 |
| Bonos | $+r_g B_h(t)$ | 0 | $+r_g B_f(t)$ | 0 | $+r_g B_b(t)$ | $-r_g B(t)$ | 0 |
| Impuestos | $-T_h(t)$ | 0 | $-T_f(t)$ | 0 | $-T_b(t)$ | $+T(t)$ | 0 |

$$\dot{M}_h - \dot{L}_h + \dot{B}_h = W - C + r_M M_h - r_L L_h + r_g B_h - T_h$$
$$\dot{M}_f - \dot{L}_f + \dot{B}_f = -W + C + G + r_M M_f - r_L L_f + r_g B_f - T_f$$
$$\dot{K} = Y - C - G - \delta K$$
$$\dot{B} = G + r_g B - T$$

De aquí se derivan las siguientes ecuaciones[4]

$$\pi = 1 - \omega - rd - \tau \tag{9}$$
$$\mu(\pi) = \frac{\kappa(\pi)}{\nu} - \delta \tag{10}$$
$$\dot{d} = \kappa(\pi) - \pi - d\mu(\pi) \tag{11}$$

En [Lim+14] se asume que $T$ es de la forma

$$T = T_b + T_s - G_b - G_s$$
$$\dot{T}_b = \Theta_b(\pi)Y$$
$$\dot{T}_s = \Theta_s(\pi)T_s$$
$$\dot{G}_b = \Gamma_b(\lambda)Y$$
$$\dot{G}_s = \Gamma_s(\lambda)G_s$$

[4]En este paso se asume $r_g = r$ o $B_f = 0$.

con

$$\Theta_b' > 0 \qquad \Theta_s' > 0 \qquad \Gamma_b' < 0 \qquad \Gamma_s' < 0$$

Se tiene entonces el sistema

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \omega(\Phi(\lambda) - \alpha) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\mu(\pi) - \alpha - \beta\right) \\
\dot{g}_s &= g_s\left(\Gamma_s(\lambda) - \mu(\pi)\right) \\
\dot{\tau}_s &= \tau_s\left(\Theta_s(\pi) - \mu(\pi)\right) \\
\dot{\pi} &= -\omega(\Phi(\lambda) - \alpha) - r\left(\nu\mu(\pi) + \nu\delta - \pi\right) + (1 - \omega - \pi)\mu(\pi) - \Theta_b(\pi) - \tau_s\Theta_s(\pi) + \Gamma_b(\lambda) + g_s\Gamma_s(\lambda)
\end{aligned}$$

Los equilibrios finitos son:

- $(\omega_1, \lambda_1, 0, 0, \pi_1)$ con

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \Phi^{-1}(\alpha) \\
\pi_1 &= \mu^{-1}(\alpha + \beta) \\
\omega_1 &= 1 - \pi_1 + \frac{\Gamma_b(\lambda_1) - \Theta_b(\pi_1) - r\left(\nu(\alpha + \beta + \delta) - \pi_1\right)}{\alpha + \beta}
\end{aligned}$$

Este equilibrio es estable si[5]

$$\begin{aligned}
\Gamma_s(\lambda_1) &< \alpha + \beta \\
\Theta_s(\pi_1) &< \alpha + \beta \\
\omega_1 &> 0 \\
\frac{\omega_1\mu'(\lambda_1) - K(\pi_1)}{\alpha + \beta} &> \frac{\omega_1\Phi'(\lambda_1)}{\omega_1\Phi'(\lambda_1) - \Gamma_b'(\lambda_1)}
\end{aligned}$$

- $(0, \lambda_2, g_2, 0, \pi_1)$ con

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \Gamma_s^{-1}(\alpha + \beta) \\
g_2 &= \pi_1 - 1 + \frac{r\left(\nu(\alpha + \beta + \delta) - \pi_1\right) + \Theta_b(\pi_1) - \Gamma_b(\lambda_2)}{\alpha + \beta}
\end{aligned}$$

Este equilibrio es estable si

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda_2) &< \alpha \\
\Theta_s(\pi_1) &< \alpha + \beta \\
K(\pi_1) &< 0 \\
g_2\left((\alpha + \beta) - \lambda_2\Gamma_s'(\lambda_2)\right) - \lambda_2\Gamma_b'(\lambda_2) &> (\alpha + \beta)\lambda_2 g_2\Gamma_s'(\lambda_2)/K(\pi_1) \\
g_2 &> 0
\end{aligned}$$

[5]

$$K(\pi) = r - \mu(\pi) + \mu'(\pi)(1 - \pi - r\nu) - \Theta_b'(\pi)$$

Y para que sea alcanzable se necesita que

$$\Gamma_s(0) > \alpha + \beta > \Gamma_s(1)$$

Notar que si el buen equilibrio es estable, se tiene que $\Gamma_s(\lambda_1) < \Gamma_s(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1 \Rightarrow \Phi(\lambda_2) < \alpha$.

- $(0, \lambda_3, 0, 0, \pi_1)$ con

  $$\lambda_3 = \Gamma_b^{-1}\left(r\left(\nu(\alpha+\beta+\delta) - \pi_1\right) - (1-\pi_1)(\alpha+\beta) + \Theta_b(\pi_1)\right)$$

  Este equilibrio es estable si

  $$\begin{aligned} \Phi(\lambda_3) &< \alpha \\ \Theta_s(\pi_1) &< \alpha + \beta \\ \Gamma_s(\lambda_3) &< \alpha + \beta \\ K(\pi_1) &< 0 \end{aligned}$$

  Notar que si el buen equilibrio es estable $\Gamma_b(\lambda_3) < \Gamma_b(\lambda_1) \Rightarrow \lambda_3 > \lambda_1 \Rightarrow \Phi(\lambda_3) > \alpha$.

- $(0, 0, g_4, 0, \pi_4)$ con

  $$\begin{aligned} \pi_4 &= \mu^{-1}\left(\Gamma_s(0)\right) \\ g_4 &= \frac{r\left(\nu\Gamma_s(0) + \nu\delta - \pi_4\right) - (1-\pi_4)\Gamma_s(0) + \Theta_b(\pi_4) - \Gamma_b(0)}{\Gamma_s(0)} \end{aligned}$$

  Este equilibrio es estable si

  $$\begin{aligned} \Theta(\pi_4) < \Gamma_s(0) &< \alpha + \beta \\ K(\pi_4) &< 0 \\ g_4\Gamma_s(0) &> 0 \end{aligned}$$

- $(0, 0, 0, \tau_5, \pi_5)$ con

  $$\begin{aligned} 0 &= \Theta_s(\pi_5) - \mu(\pi_5) \\ \tau_5 &= \frac{-r\left(\nu\mu(\pi_5) + \nu\delta - \pi_5\right) + (1-\pi_5)\mu(\pi_5) - \Theta_b(\pi_5) + \Gamma_b(0)}{\mu(\pi_5)} \end{aligned}$$

  Este equilibrio es estable si

  $$\begin{aligned} \Gamma_s(0) < \mu(\pi_5) &< \alpha + \beta \\ K(\pi_5) &< \tau_5\Theta_s'(\pi_5) \\ \mu(\pi_5)\tau_5\left(\Theta_s'(\pi_5) - \mu'(\pi_5)\right) &> 0 \end{aligned}$$

- $(0,0,0,0,\pi_6)$ con

$$0 = -r\left(\nu\mu(\pi_6) + \nu\delta - \pi_6\right) + (1-\pi_6)\mu(\pi_6) - \Theta_b(\pi_6) + \Gamma_b(0)$$

  Este equilibrio es estable si

$$\begin{aligned} \max\{\Gamma_s(0), \Theta_s(\pi_6)\} < \mu(\pi_6) &< \alpha + \beta \\ K(\pi_6) &< 0 \end{aligned}$$

Luego, si el buen equilibrio es estable, el tercer equilibrio es inestable. Además, si tomamos $\Gamma_s(0) > \alpha + \beta$, los últimos tres equilibrios resultan inestables.

Como el equilibrio malo del modelo sin gobierno se da con $\pi \to -\infty$, en [Lim+14] se preocupan por estos equilibrios infinitos, haciendo el cambio de variable $u = e^{\pi}$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \omega(\Phi(\lambda) - \alpha) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\mu(\log u) - \alpha - \beta\right) \\
\dot{g}_s &= g_s\left(\Gamma_s(\lambda) - \mu(\log u)\right) \\
\dot{\tau}_s &= \tau_s\left(\Theta_s(\log u) - \mu(\log u)\right) \\
\dot{u} &= u\left(-\omega(\Phi(\lambda) - \alpha) - r\left(\nu\mu(\log u) + \nu\delta - \log u\right) + (1 - \omega - \log u)\mu(\log u)\right. \\
&\quad \left. -\Theta_b(\log u) - \tau_s\Theta_s(\log u) + \Gamma_b(\lambda) + g_s\Gamma_s(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

El equilibrio que se tiene con $u = 0$ es $(0,0,0,0,0)$ si pedimos

$$\begin{aligned} -\infty &< \Theta_b(-\infty) \\ -\infty &< \Theta_s(-\infty) < \mu(-\infty) \end{aligned}$$

Asumiendo[6]

$$\begin{aligned} \Gamma_b, \Gamma_s &\in C^1([0,1]) \\ \lim_{\pi \to -\infty} \pi^2 \Theta_s'(\pi) &< \infty \end{aligned}$$

se tiene que el equilibrio es estable si

$$\Gamma_s(0) < \mu(-\infty)$$

[6] También habría que asumir

$$\begin{aligned} \Theta_b'(-\infty) &= 0 \\ \Gamma_s(0) &> 0 \end{aligned}$$

por lo que el equilibrio es inestable si la tasa de incremento de los subsidios en cero empleo es mayor que la menor tasa de crecimiento. Bajo esta condición, hay que analizar la posibilidad de $g_s \to \infty$. Luego, se hacen los cambios de variables $v = 1/g_s$ y $x = g_s/\pi$, con lo cual queda

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \omega(\Phi(\lambda) - \alpha) \\
\dot{\lambda} &= \lambda\left(\mu(1/vx) - \alpha - \beta\right) \\
\dot{v} &= v\left(\mu(1/vx) - \Gamma_s(\lambda)\right) \\
\dot{\tau}_s &= \tau_s\left(\Theta_s(1/vx) - \mu(1/vx)\right) \\
\dot{x} &= x\left(\Gamma_s(\lambda)(1-x) - r + vx\left(\omega(\Phi(\lambda) - \alpha) + r\nu\mu(1/vx) + r\nu\delta - (1-\omega)\mu(1/vx)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\Theta_b(1/vx) + \tau_s\Theta_s(1/vx) - \Gamma_b(\lambda)\right)\right)
\end{aligned}$$

Luego, $(0, 0, 0^{\pm}, 0, 0^{\mp})$ son equilibrios, y son estables si

$$\mu(-\infty) < \Gamma_s(0) < r$$

También tenemos los equilibrios $(0, 0, 0^{\pm}, 0, 1 - r/\Gamma_s(0))$. Estos equilibrios son estables si

$$\Gamma_s(0) > r$$

En resumen, se tienen los siguientes equilibrios infinitos:

$$\begin{gathered}
(0, 0, 0, 0, -\infty) \\
(0, 0, +\infty, 0, -\infty) \\
(0, 0, -\infty, 0, -\infty)
\end{gathered}$$

Y la estabilidad de estos está dada por la siguiente tabla[7]:

| $g_s(0)$ | $\Gamma_s(0)$ | $(0, 0, 0, 0, -\infty)$ | $(0, 0, +\infty, 0, -\infty)$ | $(0, 0, -\infty, 0, -\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(0, +\infty)$ | $(0, \mu(-\infty))$ | Estable | Inestable | Inalcanzable |
| $(0, +\infty)$ | $(\mu(-\infty), r)$ | Inestable | Estable | Inalcanzable |
| $(0, +\infty)$ | $(r, +\infty)$ | Inestable | Inestable | Inalcanzable |
| $(-\infty, 0)$ | $(0, \mu(-\infty))$ | Estable | Inalcanzable | Inestable |
| $(-\infty, 0)$ | $(\mu(-\infty), +\infty)$ | Inestable | Inalcanzable | Estable |

Por lo que en un régimen de estímulo ($g_s(0) > 0$), todos los equilibrios con $\pi \to -\infty$ se vuelven inestables si $\Gamma_s(0) > r$, pero en un régimen de austeridad no se puede prevenir la estabilidad de alguno de los dos.

[7] Los equilibrios $(0, 0, \pm\infty, 0, -\infty)$ están representados por dos tipos de equilibrios finitos al hacer el cambio de coordenadas. Este tipo de equilibrios infinitos se considerará inestable, si sus dos correspondientes finitos son inestables.

### 3.1. Resultados de persistencia

Si $\tau_s(0) \geq 0$, el sistema es $e^{-\pi}$-UWP[8].
Si $g_s(0) > 0$ y $\mu(-\infty) < r$

- El sistema es $e^{\pi}$-UWP si se cumple alguna de las siguientes condiciones

  1. $\Gamma_s(0) > r$
  2. $\lambda\Gamma_b(\lambda)$ está acotada inferiormente cuando $\lambda \to 0$

  Notar que $\mu(-\infty) < r$ es la razón por la que recurrimos a la intervención gubernamental, y que si $g_s(0) < 0$, uno de los equilibrios con $\pi \to -\infty$ es estable. En la práctica se espera que 1 sea más fácil de implementar, porque la parte estimulativa reacciona más rápidamente a las condiciones de corto plazo.

- El sistema es $\lambda$-UWP si se cumple alguna de las siguientes condiciones

  1. $\tau_s(0) = 0$ y $\Gamma_s(0) > \text{máx}\{r, \alpha + \beta\}$
  2. $\tau_s(0) = 0$ y $\lambda\Gamma_b(\lambda)$ está acotada inferiormente cuando $\lambda \to 0$
  3. $\tau_s(0) = 0$, $r < \Gamma_s(0) \leq \alpha + \beta$ y

     $$\Gamma_s(0) \leq \mu(x) \leq \alpha + \beta \Longrightarrow -r(\nu\mu(x) + \nu\delta - x) + (1 - x)\mu(x) + \Gamma_b(0) - \Theta_b(x) > 0$$

  4. $\Gamma_s(0) > \text{máx}\{r, \alpha+\beta\}$, $\Theta_s(-\infty) < 0$, $\Theta_s(\pi_1) < \alpha+\beta$ y $\Theta_s$ es convexa.

# Referencias


[Goo82] Richard M Goodwin. «A growth cycle». En: *Essays in economic dynamics*. Springer, 1982, págs. 165-170.

[Kee95] Steve Keen. «Finance and economic breakdown: modeling Minsky's "financial instability hypothesis"». En: *Journal of Post Keynesian Economics* 17.4 (1995), págs. 607-635.

[Des+06] Meghnad Desai y col. «A clarification of the Goodwin model of the growth cycle». En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 30.12 (2006), págs. 2661-2670.

[GL12] Matheus R Grasselli y B Costa Lima. «An analysis of the Keen model for credit expansion, asset price bubbles and financial fragility». En: *Mathematics and Financial Economics* 6.3 (2012), págs. 191-210.

[Lim+14] B Costa Lima y col. «Destabilizing a stable crisis: Employment persistence and government intervention in macroeconomics». En: *Structural Change and Economic Dynamics* 30 (2014), págs. 30-51.


[8] "Uniformemente débilmente persistente", esto es que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\limsup_{t\to+\infty} e^{-\pi(t)} > \varepsilon$$

donde $\varepsilon$ es independiente de las condiciones iniciales (finitas).

[GL16] Wynne Godley y Marc Lavoie. *Monetary economics: an integrated approach to credit, money, income, production and wealth*. Springer, 2016.

[Min16] Hyman Minsky. *Can "it" happen again?: essays on instability and finance*. Routledge, 2016.