

# *Einstein y la matemática*



*Semana de la Matemática*  
*Departamento de Matemática*  
*FCEyN - UBA*

*Alicia Dickenstein*

2 de mayo de 2007

# Agradecimientos:

Agradezco a los siguientes colegas y amigos que me aportaron distintas referencias y reflexiones: Dan Avritzer, James Carlson, Eduardo Cattani, Pablo di Napoli, Susana Fornari, Enrique Lami Dozo, Diego Mazzitelli, Pedro Politi y Jorge Vargas.

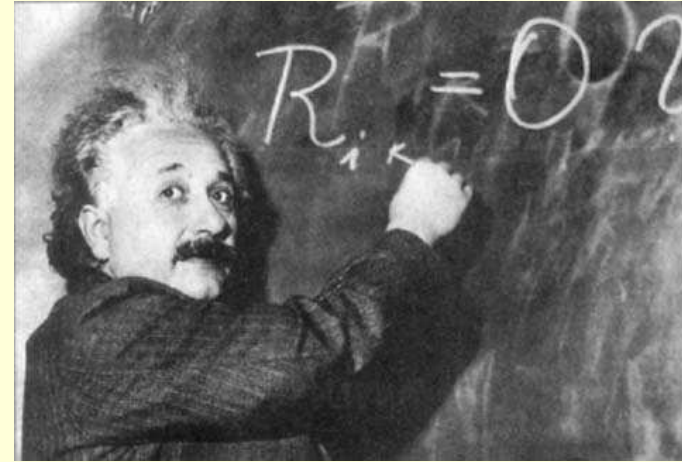
También agradezco muy especialmente a Leonard Echagüe por los varios programas para visualizar algunos aspectos de la geometría no euclidiana que preparó para esta charla, así como por todas las explicaciones que me brindó sobre la generación de este software, disponible en:

<http://www.fcen.uba.ar/museomat/zona.htm>

# **Albert Einstein (1879-1955)** y su relación con **la matemática**



**Cuando era joven...**  
**pensaba que la mayor**  
**parte de la matemática**  
**era irrelevante para la física...**  
**Y que era una sólo una herramienta.**



**Cuando maduró...**  
**se dio cuenta de que**  
**necesitaba esencialmente**  
**mucha de la matemática**  
**abstracta que había**  
**despreciado...**

# “La teoría de la relatividad general” (1916)

1916.

№ 7.

## ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. *Die Grundlage  
der allgemeinen Relativitätstheorie;*  
von *A. Einstein.*

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie“ bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie“ und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül“, welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorzusetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt, so daß ein Studium mathematischer Literatur für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich ist. Endlich sei an dieser Stelle dankbar meines Freundes, des Mathematikers Grossmann, gedacht, der mir durch seine Hilfe nicht nur das Studium der einschlägigen mathematischen Literatur ersparte, sondern mich auch beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte.

# Manuscrito de "La teoría de la relatividad general" (1916)

17

Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

A. Prinzipielle Grundlagen zum Postulat der Relativität.

§1. Die spezielle Relativitätstheorie.

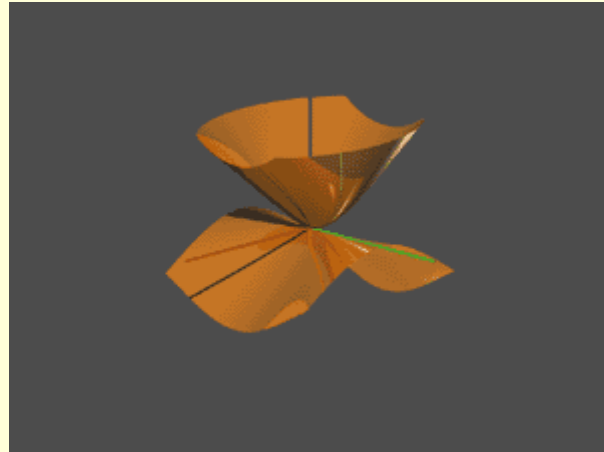
Die im Nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als "Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die nicht im folgenden "spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. Diese Verallgemeinerung wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen <sup>Koordinaten</sup> und der Zeitkoordinate hier erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem "absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss und Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits für auf Probleme der theoretischen Physik angewandt wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei denen Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel ~~entwickelt~~ <sup>entwickelt</sup> im ~~einigen~~ <sup>einigen</sup> ~~Stadium~~ <sup>Stadium</sup> mit sodass ein Studieren



## Albert Einstein y la matemática (cont.) – Traducción

- ... La generalización de la teoría de la relatividad ha sido **facilitada considerablemente** por **Minkowski**, un matemático que fue el primero en reconocer la equivalencia formal de las coordenadas del espacio y la coordenada del tiempo, y que utilizó esto en la construcción de la teoría.
- Las herramientas matemáticas que son necesarias para la teoría general de la relatividad ya estaban disponibles en el “cálculo diferencial absoluto”, que está basado en las investigaciones de variedades no-euclidianas hechas por **Gauss, Riemann** y **Christoffel**, y que ha sido sistematizado por **Ricci** y **Levi-Civita** y que ya ha sido aplicado a problemas de física teórica.
- Finalmente, quiero agradecer a mi amigo, el **matemático Grossmann**, cuya ayuda no solo me salvó del esfuerzo de estudiar la pertinente literatura matemática, sino que **también me ayudó en la búsqueda de las ecuaciones del campo gravitatorio...**

# El desarrollo de la geometría que necesitó ...y encontró Einstein



# Euclides de Alejandría

## (325AC-265AC)

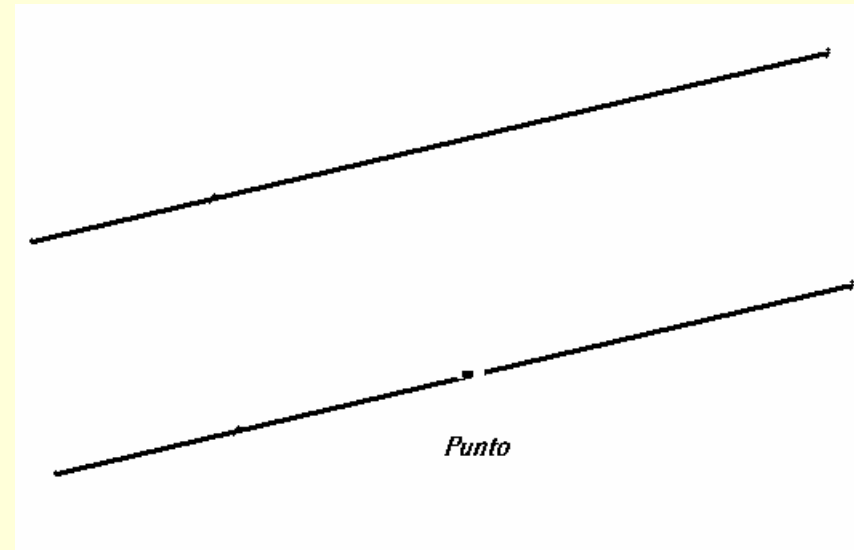
- **Euclides**, considerado “el padre de la geometría”, anticipó en sus **Elementos** (*el libro de texto más exitoso de la historia*) el **método axiomático de la matemática moderna**.
- Dio una serie de axiomas o postulados básicos, obteniendo todos los demás resultados a partir de ellos por medio de demostraciones (teoremas).





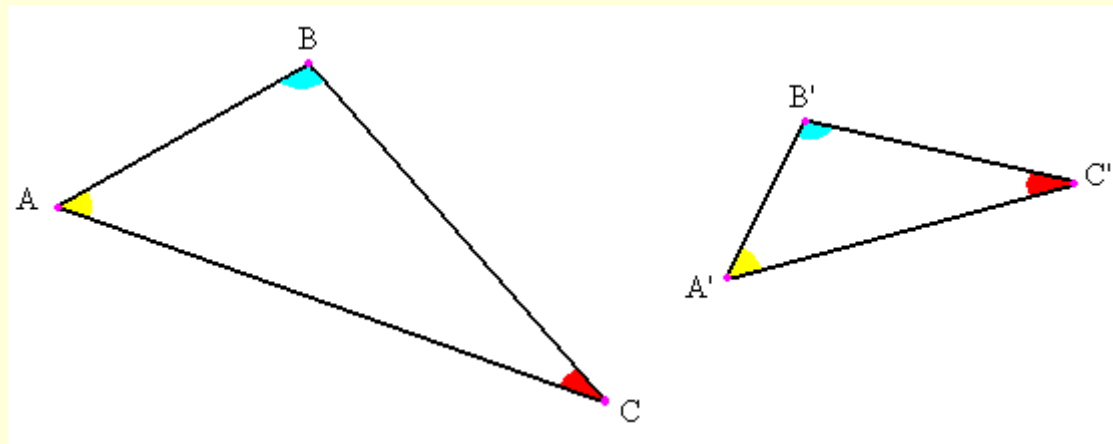
# Los primeros 5 postulados

- **P1:** Dados 2 puntos distintos, existe una única recta que pasa por ellos
- **P2:** Un segmento rectilíneo puede prolongarse siempre a una recta (se supone que una recta es infinita).
- **P3:** Existe una única circunferencia con centro y diámetro dados
- **P4:** Todos los ángulos rectos son iguales
- **P5:** (versión moderna de Playfair, 1795) En un plano, por un punto exterior a una recta, pasa una y solo una recta paralela a ella.
- **Euclides** define: punto, recta, etc.
- Dos rectas son paralelas si no se cortan (“tienen la misma dirección”)

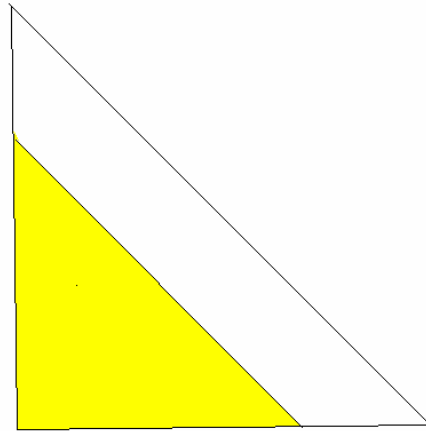


# Durante 2000 años...

- Era claro desde el principio que el quinto postulado es **diferente** a los demás y **Euclides** se cuidó muy bien de demostrar todos los teoremas posibles sin utilizarlo.
- **Proclus** (410-485) escribió un comentario sobre los *Elementos*, donde habla de intentos de probar el quinto postulado a partir de los otros cuatro y da una **prueba falsa**.
- Posteriormente se hicieron **MUCHOS** falsos intentos de probar el quinto postulado a partir de los otros. En general se cometía el error de asumir una propiedad obvia... que de hecho es **equivalente** al postulado, como por ejemplo la siguiente (**Wallis**, 1863):
  - **Para cada triángulo, existen triángulos semejantes de magnitud arbitraria.**



O dibujando ambos en la misma  
dirección:



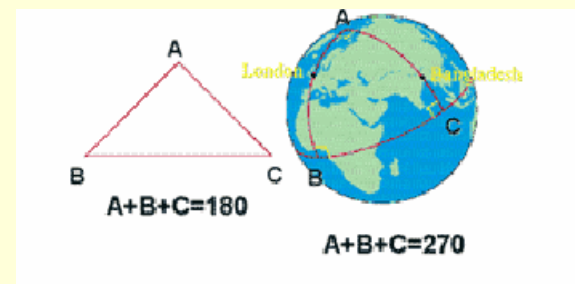
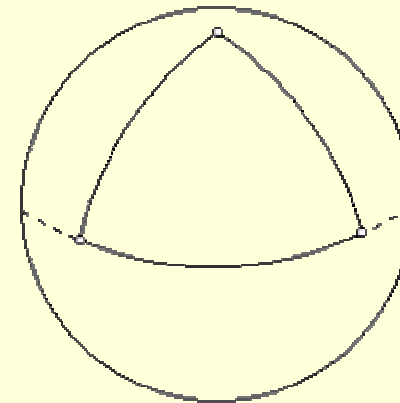
El triángulo grande y el amarillo son semejantes,  
tienen iguales ángulos y distintas dimensiones

# Incluso:

- Girolamo Saccheri escribió en 1733 un tratado completo titulado *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, de lo que luego se llamaría geometría **no** euclidiana, tratando de encontrar una contradicción al negar el quinto postulado.

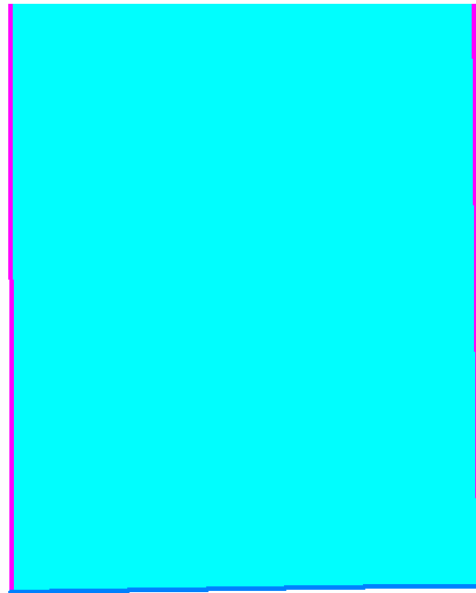
# Otra equivalencia

- **Legendre**, en uno de sus muchos intentos por DEMOSTRAR el quinto postulado (entre 1800 y 1823), probó que el quinto postulado de Euclides es **equivalente** a:
  - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.





En un plano euclídeo (como el que estudiamos en la escuela), como los dos ángulos de abajo son rectos...



las rectas verticales resultan paralelas y no puede "cerrarse" un triángulo

**¿Por qué pasaron 2000 años para la aparición de las geometrias no euclidianas, es decir donde no valga el 5to. postulado?**

- **Laplace** (1749-1827) sostenía que si las dimensiones de los cuerpos del universo, sus distancias y velocidades decrecieran “proporcionalmente”, los cuerpos celestiales describirían curvas exactamente similares. Es decir que estos fenómenos son independientes de las dimensiones del universo. Y esta similaridad es equivalente al 5to. postulado, como había notado Wallis.

## ¿Por qué pasaron 2000 años para la aparición de las geometrias no euclidianas, es decir donde no valga el 5to. postulado? (cont.)

- La geometría estaba inextricablemente ligada al espacio, nuestro universo físico. Y el espacio se consideraba infinito, homogéneo y la base de toda nuestra experiencia. Las concepciones estaban dominadas por el pensamiento de Kant, para el cual era impensable algo distinto a la geometría euclidiana.
- Era impensable permitirse pensar en otras geometrías posibles, porque entonces la euclidiana no sería necesariamente “la ciencia del espacio” y de hecho no habría tal vez tal ciencia... La matemática no daría verdades del espacio...

- **HASTA QUE A FINES DEL SIGLO XVIII Y COMIENZOS DEL SIGLO XIX A ALGUNOS MATEMATICOS SE LES OCURRIO QUE LA CAUSA DE TANTOS FRACASOS DE DEMOSTRACION A LO LARGO DE 20 SIGLOS PODRÍA SIMPLEMENTE SER QUE NO ES CIERTO...**
- **Y EN VEZ DE OBSERVAR EL MUNDO FISICO Y CONFIAR EN PRECONCEPTOS FILOSOFICOS, DECIDIERON CONFIAR EN SU MENTE Y SU PODER DE ABSTRACCION.**
- **Y así florecieron las geometrías no euclidianas...**

# Johann Carl Friedrich Gauss (1777 -1855)

- La primer persona en realmente entender el problema fue **Gauss**, que comenzó a trabajar en el asunto de las paralelas cuando tenía sólo 15 años. En 1817 se convenció de que había otras geometrías... Pero ocultó sus descubrimientos, para evitar controversias, ataques y burlas

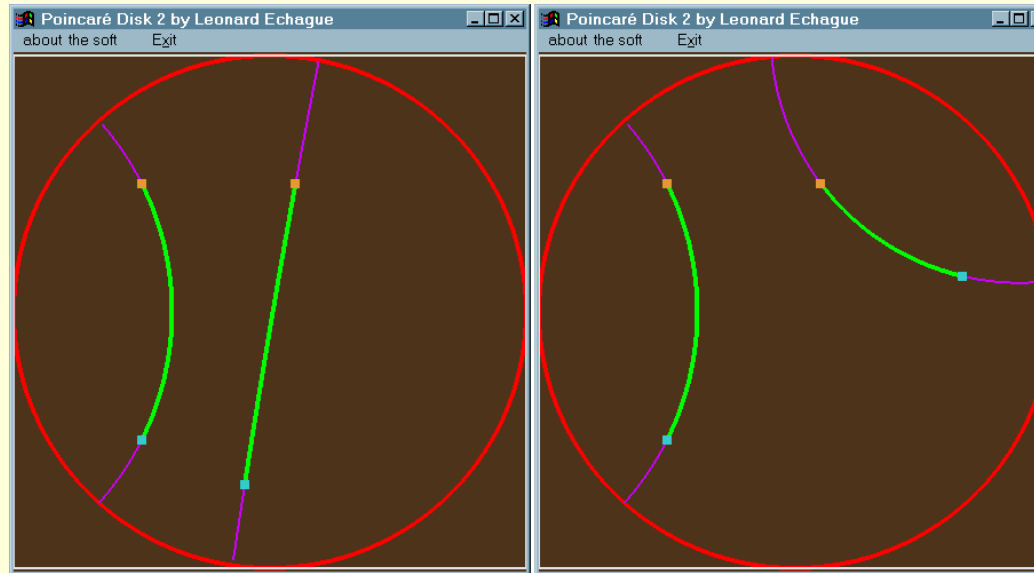




# Geometrías no euclidianas

- Bolyai (1802-1860), Lobachevsky (1792-1856), Beltrami (1835-1900), Poincaré (1854-1912), Klein (1849-1925)
- En las geometrías no euclidianas vale el 5to. postulado modificado: Por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a esa recta.
- Un punto es un punto, pero ¿qué es una recta?

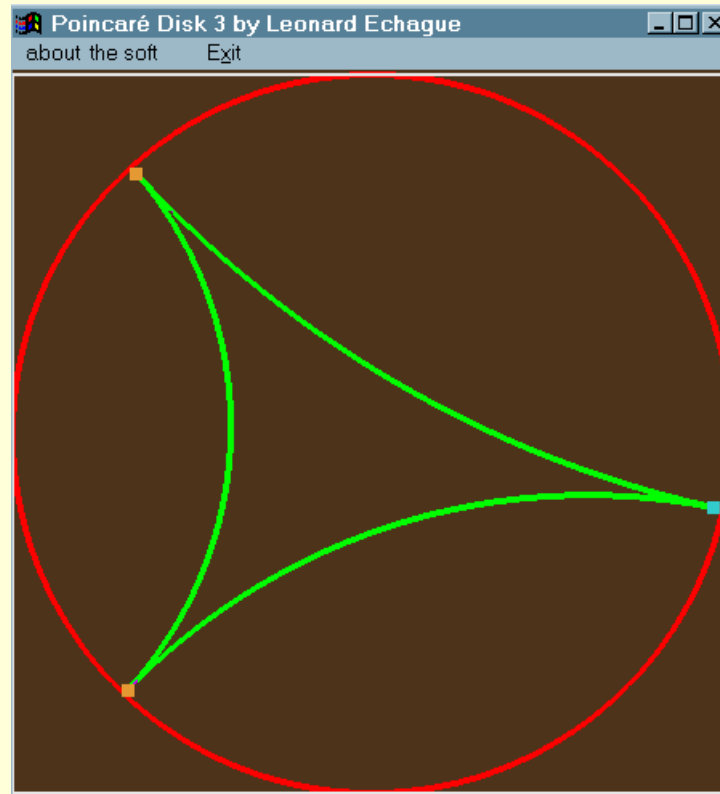
# Geometría no euclidiana en acción: el modelo de Jules Henri Poincaré (1854 -1912)



“rectas paralelas”

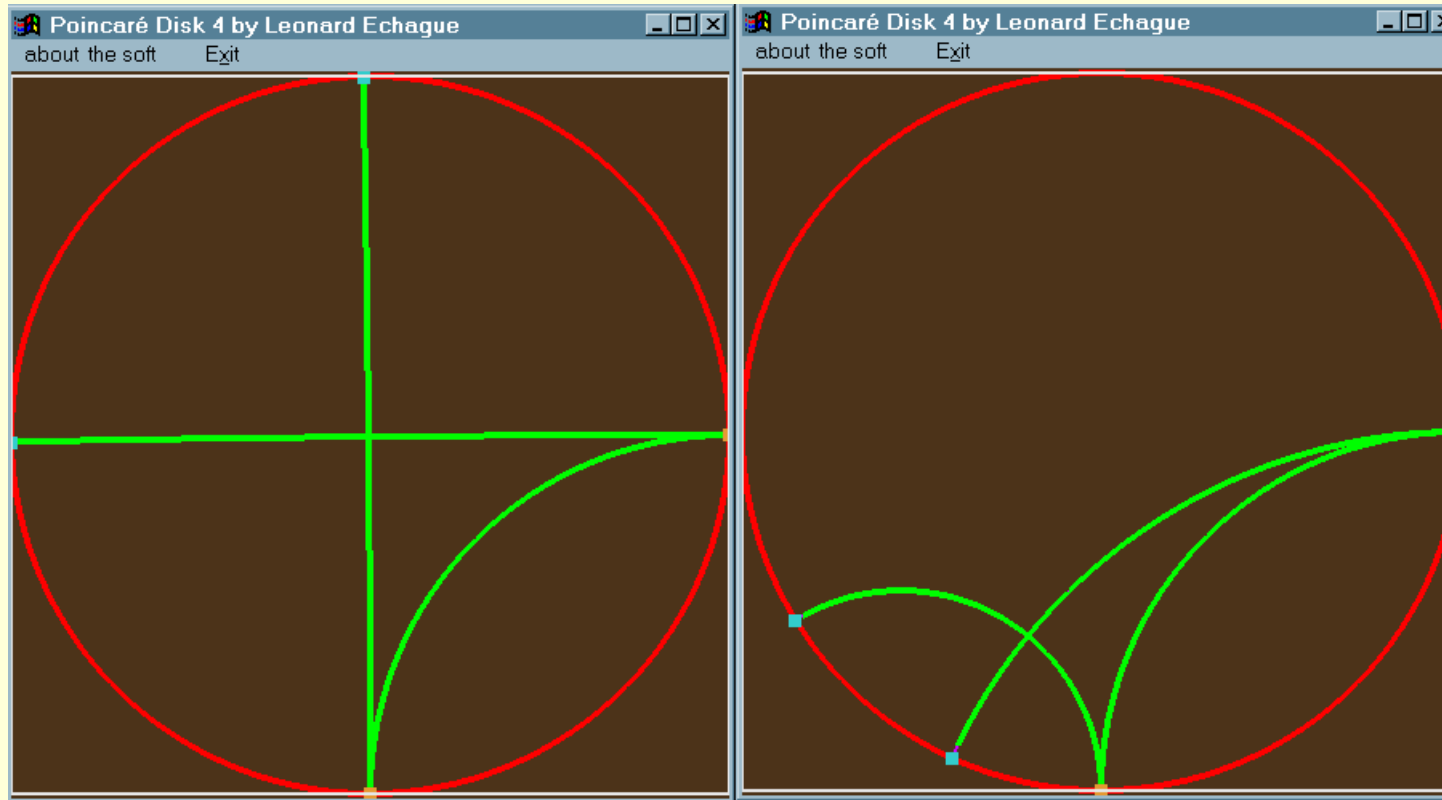
**Software de Leonard Echague**

# Triángulo con suma de ángulos = ?



**Software de Leonard Echague**

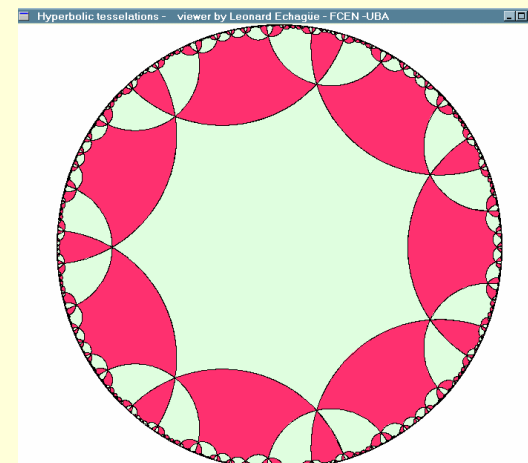
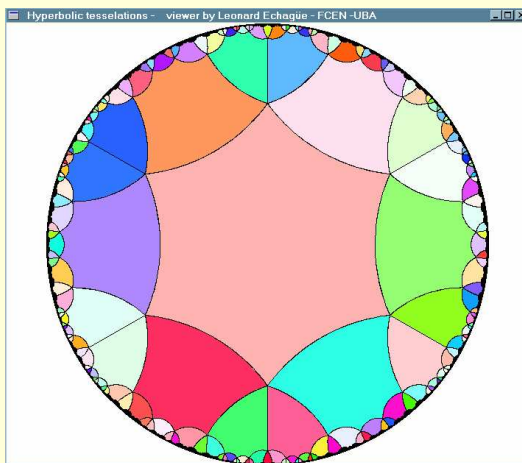
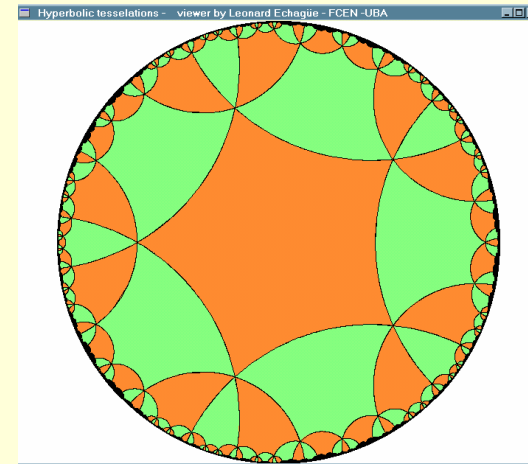
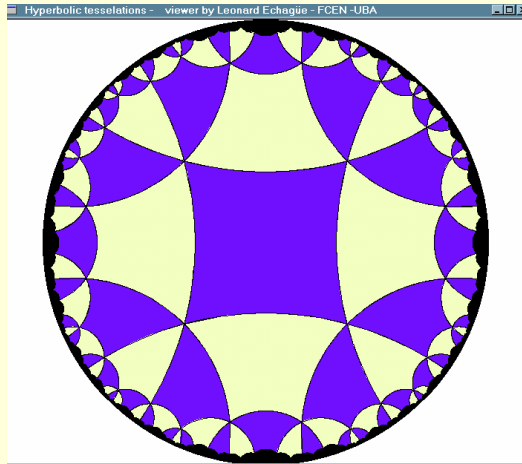
# Paralelas y perpendiculares



**Software de Leonard Echague**

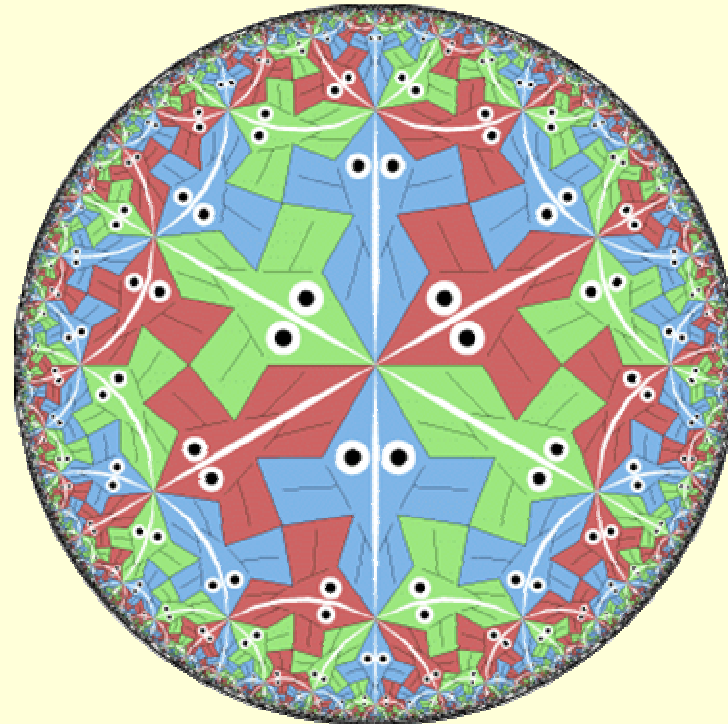
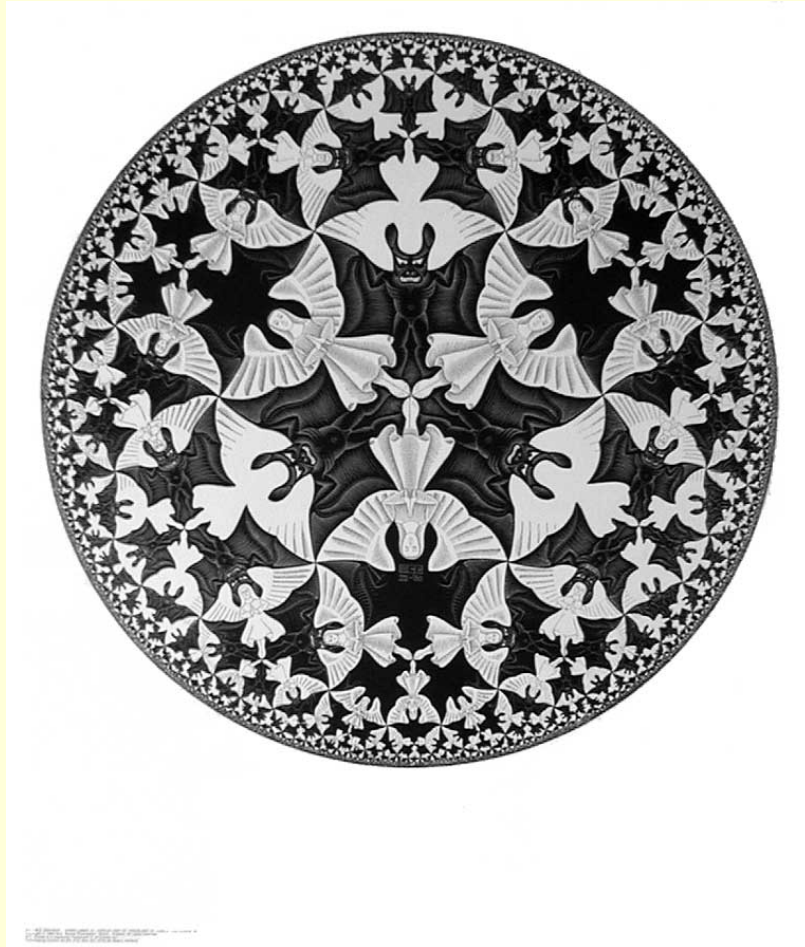
# Teselados hiperbólicos

(Image viewer de Leonard Echagüe)





# O en la imaginación de M.C.Escher:



# Antecedentes de la teoría especial de la relatividad

- En 1898 **Poincaré** escribió un artículo en el que enunciaba dos preguntas muy significativas sobre el tiempo (que ya flotaban en el ambiente):
  - 1) ¿Tiene sentido decir que un segundo hoy es igual a un segundo mañana?
  - 2) ¿Tiene sentido decir que dos eventos separados en el espacio son simultáneos?
- La primer pregunta aún no tiene una respuesta satisfactoria, pero la segunda fue contestada por **Einstein** en 1905.
- De todos modos, **Poincaré anticipó** esencialmente la teoría de la relatividad especial en varios trabajos y conferencias. **Aparentemente, no supo interpretar en términos físicos las ecuaciones obtenidas...**

# La teoría especial de la relatividad

- El artículo de Einstein es remarcable por el punto de vista diferente que toma. No se presenta como un intento de explicar resultados experimentales sino por su belleza y simplicidad.
- *Los postulados básicos son:*
  - 1. Las leyes de la física toman la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales (en movimiento uniforme entre sí)
  - 2. En cualquier marco inercial, la velocidad  $c$  de la luz es la misma.

# La teoría especial de la relatividad

- *Consecuencias:*
- **No hay tiempo ni espacio absolutos (ni “éter”). Los intervalos de tiempo y de longitud dependen del sistema de referencia en los que se realiza la experiencia.**
- **Se pierde la noción de simultaneidad de sucesos (depende del observador).**
- **AUNQUE VERIFICABLE, SIGUE SIENDO ANTI-INTUITIVO**
- **La comunidad física comenzó a prestarle atención luego de un trabajo del reconocido físico Max Planck en 1908.**

# Hermann Minkowski

## (1864 -1909)

- **Minkowski** dio una nueva visión de la teoría de la relatividad especial en 1908, al reformularla naturalmente en un espacio de 4 dimensiones, 3 espaciales y 1 temporal, indisolublemente ligadas (un espacio-tiempo de 4 dimensiones).
- La teoría era bella y elegante, pero **Einstein** no se mostró al principio muy impresionado y en cambio dijo que desde que los matemáticos se habían apoderado de su teoría, a duras penas la reconocía...
- Sin embargo, este enfoque resultó crucial para el desarrollo ulterior de la teoría general





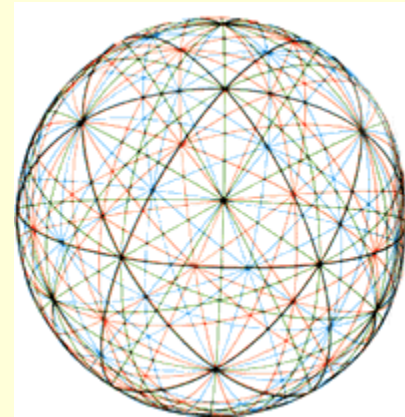
# Minkowski (cont.)

- El 21 de Septiembre de 1908 Minkowski dio una famosa conferencia en la Universidad de Colonia, que comenzó con estas palabras:
- *“Las visiones del espacio y del tiempo que quiero establecer han surgido del terreno de la física experimental, y en ello reposa su fuerza. Son radicales. De ahora en más el espacio por sí mismo, y el tiempo por sí mismo, se han esfumado en meras sombras, y solamente una especie de unión de los dos consevará una realidad “*
- *“Nunca nadie ha percibido jamás un espacio sin un tiempo, ni un tiempo, excepto en un espacio.”*

# Hacia la teoría general – vía la matemática

**Gauss** demostró que es posible detectar la curvatura para “seres planos” que viven sobre la cáscara de la esfera.

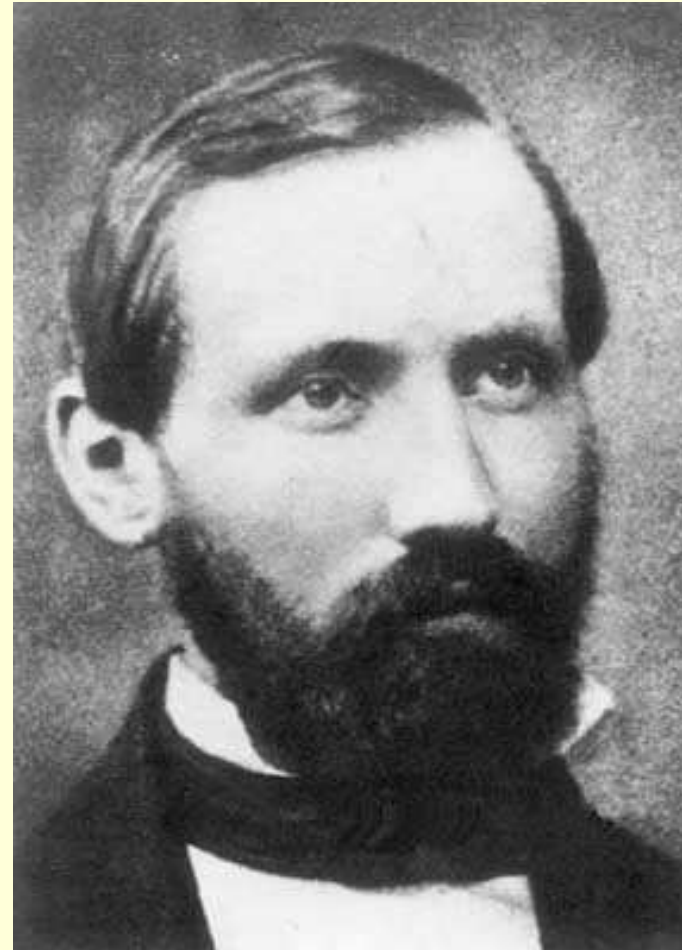
Es decir: la curvatura puede medirse **intrínsecamente** sin salirse de la superficie (sin salir al espacio ambiente).



# Georg Friedrich Bernhard Riemann

(1826-1866)

- Riemann, alumno de Gauss reformuló todo el concepto de la geometría, al estudiar espacios geométricos abstractos de cualquier dimensión sin sistemas de referencia prefijados, dotados de suficiente estructura extra como para poder medir longitudes y así determinar curvaturas.
- Espacios (en general no-euclidianos) donde es posible hacer análisis y física.
- geodésicas = rectas

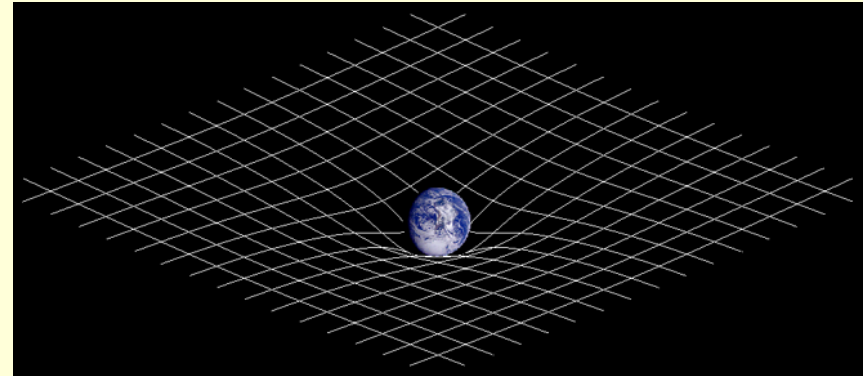


# Hacia la teoría general – vía la matemática

- La **noción de tensores desarrollada por matemáticos permite expresar el principio general de covariancia** que establece que todos los sistemas coordinados son equivalentes para la formulación de las leyes generales de la naturaleza.

# Teoría general de la relatividad (1916)

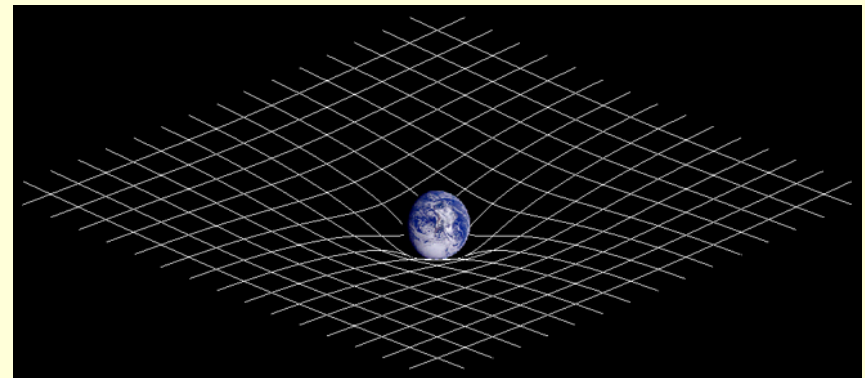
- Aquí es donde el genio de **Einstein** sobresale, con la idea de que  
la gravedad es una propiedad geométrica del universo!!!



# Teoría general de la relatividad

(cont.)

- Las trayectorias de partículas **sin aceleración** (con vector velocidad “constante” (paralelo)), por ejemplo, la órbita de un planeta alrededor de una estrella, son **geodésicas**.
- La **geometría misma del espacio-tiempo depende de la distribución de la masa y la energía**, capaz de curvar el espacio y hacer que el tiempo transcurra cada vez más despacio.

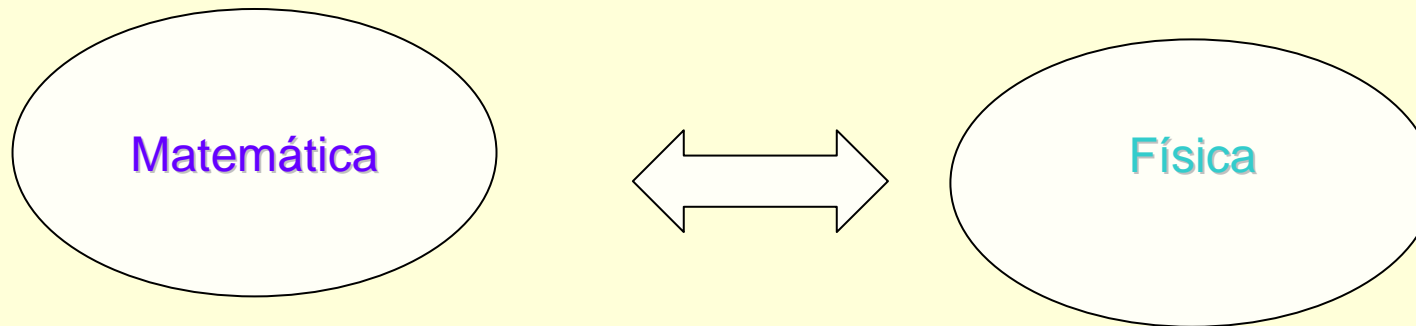


# Teoría general (cont.)

- *Una de las consecuencias de esta teoría general es que admitiendo que todos los sistemas de referencia acelerados son equivalentes, **la geometría del universo no puede ser euclidiana.***
- **Einstein** terminó escribiendo: “... En toda mi vida no he trabajado tan duramente, y **me he imbuido de un gran respeto por la matemática, cuya parte más sutil yo había considerado en mi ingenuidad como un puro lujo hasta ahora...**”

# Matemática y física

¿Fue un hecho aislado el que Einstein encontrara desarrollada la matemática teórica que necesitó para postular su explicación del universo? La interacción fue, es y será fecunda en ambas direcciones.



- La matemática provee fundamentos sólidos, estructuras, etc.
- E intuiciones.

- La física provee motivaciones, problemas interesantes a resolver, etc. E intuiciones.



# Palabras de **A. Einstein** en 1933

- Por supuesto que la **experiencia** retiene su cualidad de **criterio último** de la **utilidad** física de una construcción matemática. **Pero el principio creativo reside en la matemática.**
- Por tanto, en cierto sentido, considero que el pensamiento puro puede captar la realidad, tal como los antiguos habían soñado...

# Y para terminar...

- Pero nadie puede explicar la “**irrazonable efectividad de la matemática en las ciencias naturales**”, según las palabras del físico **Eugene Wigner** en 1960.
- O en las palabras de **Albert Einstein**, en una conferencia dictada el 27 de enero de 1921 en la Academia Prusiana de Ciencia: "En este punto se presenta un enigma que en todas las épocas ha agitado las mentes inquietas. **¿Cómo puede ser que la matemática, que después de todo no es más que un producto del pensamiento humano que es independiente de la experiencia, resulte tan admirablemente apropiada a los objetos de la realidad?**".

# **MI RESPUESTA:**

La matemática es la exteriorización  
del cerebro humano...

# Bibliografía:

- Dan Avritzer: *A Crise dos Fundamentos da Matemática no Final do Século XIX: O exemplo da Geometria*, manuscrito.
- Claude Brezinski: *El Oficio de Investigador, Siglo XXI de España Editores*, 1993.
- Guy Duplat: *Poincaré avait devancé Einstein*, La Libre Belgique.
- Albert Einstein: *El significado de la relatividad*, Planeta-Agostini 1985.
- Albert Einstein y Leopold Infeld: *La Física, Aventura del Pensamiento*, Editorial Losada, 1939.
- Richard L. Faber: *Differential geometry and relativity theory: an introduction*. Marcel Dekker, 1983.
- José M. Sánchez Ron: *Einstein, la relatividad y las matemáticas*, La Gaceta de la RSME, Vol.7.1(2004), 153-184.
- Thomas Hawkins: *Emergence of the theory of Lie Groups: an essay in the history of mathematics*, Springer-Verlag, 2000.
- Jim Holt: *TIME BANDITS - What were Einstein and Gödel talking about?*, The New Yorker, February 28, 2005.
- Morris Kline: *Mathematics for the Nonmathematician*, Dover Publications, 1967.
- Reinhard Laubenbacher y David Pengelley: *Mathematical Expeditions, Chronicles by the Explorers*, Springer-Verlag, 1999.
- H.A. Lorentz, A. Einstein, H.Minkowski and H. Weyl: *The Principle of relativity*, Dover Publications, 1952.
- *The Mac Tutor History of Mathematics Archive*, U. St. Andrews, Escocia: <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/>
- Barrett O'Neill: *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1983.
- Robert Osserman: *Poetry of the Universe, A Mathematical Exploration of the Cosmos*, Anchor Books, 1995.
- Barry Parker: *Einstein, Pasiones de un científico*, Editorial El Ateneo, 2005.
- William F. Reynolds: *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid*, The American Mathematical Monthly, 1993.
- Luis Santaló: *Geometría y Física*, Publicación del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, 1976.
- Bernard F. Schutz: *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, 1984.
- Kip S. Thorne: *Black Holes and Time Warps, Einstein's Outrageous Legacy*, W.W. Norton & Company, 1994.
- Steven Weinberg: *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons.
- Wikipedia, The Free Encyclopedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/>
- The Wikimedia Commons (repositorio gratuito de imágenes y sonidos).
- [www.albert-einstein.org](http://www.albert-einstein.org), Albert Einstein Archives, The Hebrew University of Jerusalem.