Subgrupos cuánticos de grupos cuánticos multiparamétricos

Gastón Andrés García

Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
CIEM-CONICET

IV Encuentro Nacional de Álgebra

4 al 9 de Agosto de 2008, La Falda, Córdoba.

Plan

Plan

1. ¿Qué es un grupo cuántico?

Plan

I ¿Qué es un grupo cuántico?

II Construcción y caracterización de los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple dado por deformación en un parámetro.

Plan

I ¿Qué es un grupo cuántico?

II Construcción y caracterización de los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple dado por deformación en un parámetro.

III Subgrupos cuánticos de los grupos cuánticos generales lineales multiparamétricos.

I. Introducción

- Drinfeld ('86) y Jimbo (independientemente):

$U_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ deformación en un parámetro de $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semisimple.

I. Introducción

- Drinfeld ('86) y Jimbo (independientemente):

$U_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ deformación en un parámetro de $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semisimple.

- De Concini & Lyubashenko ('94):

$\mathcal{O}_q(G) \rightsquigarrow$ deformaciones en un parámetro de $\mathcal{O}(G)$, G grupo algebraico complejo simple, conexo y simplemente conexo.

I. Introducción

- Drinfeld ('86) y Jimbo (independientemente):

$U_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ deformación en un parámetro de $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semisimple.

- De Concini & Lyubashenko ('94):

$\mathcal{O}_q(G) \rightsquigarrow$ deformaciones en un parámetro de $\mathcal{O}(G)$, G grupo algebraico complejo simple, conexo y simplemente conexo.

Son objetos "duales":

I. Introducción

• Drinfeld ('86) y Jimbo (independientemente):

$U_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ deformación en un parámetro de $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semisimple.

• De Concini & Lyubashenko ('94):

$\mathcal{O}_q(G) \rightsquigarrow$ deformaciones en un parámetro de $\mathcal{O}(G)$, G grupo algebraico complejo simple, conexo y simplemente conexo.

Son objetos "duales": existe un apareamiento dual de Hopf no degenerado

$$\langle -, - \rangle : U_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}_q(G) \to \mathbb{C}.$$

I. Introducción

- Drinfeld ('86) y Jimbo (independientemente):

$U_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ deformación en un parámetro de $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie semisimple.

- De Concini & Lyubashenko ('94):

$\mathcal{O}_q(G) \rightsquigarrow$ deformaciones en un parámetro de $\mathcal{O}(G)$, G grupo algebraico complejo simple, conexo y simplemente conexo.

Son objetos "duales": existe un apareamiento dual de Hopf no degenerado

$$\langle -,-\rangle : U_q(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{O}_q(G) \to \mathbb{C}.$$

Implica $\mathcal{O}_q(G) \subseteq U_q(\mathfrak{g})^\circ$ y $U_q(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{O}_q(G)^\circ$ donde $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

• Lusztig: define grupos cuánticos sobre $\mathbb{Q}(q)$ con q raíz primitiva de la unidad.

$\mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ Núcleos de Frobenius-Lusztig o grupos cuánticos pequeños. Son de dimensión finita con $\dim \mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

- Lusztig: define grupos cuánticos sobre $\mathbb{Q}(q)$ con q raíz primitiva de la unidad.

$\mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ Núcleos de Frobenius-Lusztig o grupos cuánticos pequeños. Son de dimensión finita con $\dim \mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

- Deformaciones multiparamétricas:

• Lusztig: define grupos cuánticos sobre $\mathbb{Q}(q)$ con q raíz primitiva de la unidad.

$\mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ Núcleos de Frobenius-Lusztig o grupos cuánticos pequeños. Son de dimensión finita con $\dim \mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

• Deformaciones multiparamétricas:

Construidas usando twist para deformaciones de $U(\mathfrak{gl}_n)$ [Chin-Musson].

- Lusztig: define grupos cuánticos sobre $\mathbb{Q}(q)$ con q raíz primitiva de la unidad.

$\mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ Núcleos de Frobenius-Lusztig o grupos cuánticos pequeños. Son de dimensión finita con $\dim \mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

- Deformaciones multiparamétricas:

Construidas usando twist para deformaciones de $U(\mathfrak{gl}_n)$ [Chin-Musson]. Deformaciones multiparamétricas de $\mathcal{O}(GL_n)$ (Reshetikin, Sudbery, *et al.*). Resultan ser equivalentes por twist a una deformación de $\mathcal{O}(GL_n)$ [Artin-Schelter-Tate].

- Lusztig: define grupos cuánticos sobre $\mathbb{Q}(q)$ con q raíz primitiva de la unidad.

$\mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow$ Núcleos de Frobenius-Lusztig o grupos cuánticos pequeños. Son de dimensión finita con $\dim \mathbf{u}_q(\mathfrak{g}) = \ell^{\dim \mathfrak{g}}$.

- Deformaciones multiparamétricas:

Construidas usando twist para deformaciones de $U(\mathfrak{gl}_n)$ [Chin-Musson].
Deformaciones multiparamétricas de $\mathcal{O}(GL_n)$ (Reshetikin, Sudbery, *et al.*).
Resultan ser equivalentes por twist a una deformación de $\mathcal{O}(GL_n)$ [Artin-Schelter-Tate].

Deformaciones en dos parámetros de $U(\mathfrak{gl}_n)$ y $\mathcal{O}(GL_n)$, (Takeuchi, *et al.*).

Hasta ahora *no existe* una defición axiomática de grupo cuántico

Hasta ahora *no existe* una defición axiomática de grupo cuántico

Grupo cuántico: "deformación de un álgebra asociativa asociada a un grupo algebraico"

Hasta ahora *no existe* una defición axiomática de grupo cuántico

Grupo cuántico: “deformación de un álgebra asociativa asociada a un grupo algebraico”

Estudio de los grupo cuánticos: a través de los ejemplos conocidos.

$$G \rightsquigarrow \mathcal{O}(G) \text{ comm. Hopf alg.}$$

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G),\mathbb{C}) = G \leftsquigarrow\!\!\rightsquigarrow \mathcal{O}(G) \text{ comm. Hopf alg.}$$

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C}) = G \leftrightsquigarrow \mathcal{O}(G) \text{ comm. Hopf alg.}$$

$$G_q \quad \leftrightsquigarrow \quad \mathcal{O}_q(G) \text{ non-comm. Hopf alg.}$$

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G), \mathbb{C}) = G \leftrightsquigarrow \mathcal{O}(G) \text{ comm. Hopf alg.}$$

$$\Gamma \hookrightarrow G \leftrightsquigarrow \mathcal{O}(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\Gamma)$$

$$G_q \leftrightsquigarrow \mathcal{O}_q(G) \text{ non-comm. Hopf alg.}$$

$$\mathrm{Alg}(\mathcal{O}(G),\mathbb{C}) = G \longleftrightarrow \mathcal{O}(G) \text{ comm. Hopf alg.}$$

$$\Gamma \hookrightarrow G \longleftrightarrow \mathcal{O}(G) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(\Gamma)$$

$$G_q \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathcal{O}_q(G) \text{ non-comm. Hopf alg.}$$

$$\Gamma_q \hookrightarrow G_q \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathcal{O}_q(G) \twoheadrightarrow A$$

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{op}}$

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{ op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{ op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

- Primera vez considerado por Podlés para $\mathcal{O}_q(SU(2))$ y $\mathcal{O}_q(SO(3))$.

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{ op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

- Primera vez considerado por Podlés para $\mathcal{O}_q(SU(2))$ y $\mathcal{O}_q(SO(3))$.
- E. Müller lo resolvió para SL_n en el caso de dimensión finita.

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

- Primera vez considerado por Podlés para $\mathcal{O}_q(SU(2))$ y $\mathcal{O}_q(SO(3))$.
- E. Müller lo resolvió para SL_n en el caso de dimensión finita.
- N. Andruskiewitsch y G.A.G para G grupo de Lie complejo simple, conexo y simplemente conexo; en raíces de 1.

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{ op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

- Primera vez considerado por Podlés para $\mathcal{O}_q(SU(2))$ y $\mathcal{O}_q(SO(3))$.
- E. Müller lo resolvió para SL_n en el caso de dimensión finita.
- N. Andruskiewitsch y G.A.G para G grupo de Lie complejo simple, conexo y simplemente conexo; en raíces de 1.

Estrategia:

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

- Primera vez considerado por Podlés para $\mathcal{O}_q(SU(2))$ y $\mathcal{O}_q(SO(3))$.
- E. Müller lo resolvió para SL_n en el caso de dimensión finita.
- N. Andruskiewitsch y G.A.G para G grupo de Lie complejo simple, conexo y simplemente conexo; en raíces de 1.

Estrategia:

(1) Dar una construcción general de los cocientes.

Categoría de grupos cuánticos : $\mathcal{H}opf^{\text{op}}$

Subgrupos cuánticos de $G_{\mathbf{q}}$ $\rightsquigarrow$ cocientes de álgebras de Hopf de $\mathcal{O}_{\mathbf{q}}(G)$

Problema

Determinar los subgrupos cuánticos de un grupo cuántico dado.

- Primera vez considerado por Podlés para $\mathcal{O}_q(SU(2))$ y $\mathcal{O}_q(SO(3))$.
- E. Müller lo resolvió para SL_n en el caso de dimensión finita.
- N. Andruskiewitsch y G.A.G para G grupo de Lie complejo simple, conexo y simplemente conexo; en raíces de 1.

Estrategia:

(1) Dar una construcción general de los cocientes.

(2) Probar que la construcción es exhaustiva.

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.
- ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

- ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

- $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ = núcleo de Frobenius-Lusztig; generado por $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : 1 \leq i \leq n\}$.

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

- ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

- $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) =$ núcleo de Frobenius-Lusztig; generado por $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : 1 \leq i \leq n\}$. Denotemos $\mathbb{T} := \langle K_{\alpha_1}, \dots, K_{\alpha_n} \rangle = G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ y para todo $S \subseteq \Pi$, sea $\mathbb{T}_S := \langle K_{\alpha_i} : \ \alpha_i \in S \rangle$.

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

- ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

- $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}) =$ núcleo de Frobenius-Lusztig; generado por $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : 1 \leq i \leq n\}$. Denotemos $\mathbb{T} := \langle K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n} \rangle = G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ y para todo $S \subseteq \Pi$, sea $\mathbb{T}_S := \langle K_{\alpha_i} : \ \alpha_i \in S \rangle$.

Teorema (,)

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

- ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

- $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ = núcleo de Frobenius-Lusztig; generado por $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : 1 \leq i \leq n\}$. Denotemos $\mathbb{T} := \langle K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n} \rangle = G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ y para todo $S \subseteq \Pi$, sea $\mathbb{T}_S := \langle K_{\alpha_i} : \ \alpha_i \in S \rangle$.

Teorema (De Concini & Lyubashenko,)

(a) *$\mathcal{O}_\epsilon(G)$ contiene una subálgebra de Hopf central isomorfa a $\mathcal{O}(G)$.*

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

• $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

• ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

• $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ = núcleo de Frobenius-Lusztig; generado por $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : 1 \leq i \leq n\}$. Denotemos $\mathbb{T} := \langle K_{\alpha_1}, \dots, K_{\alpha_n} \rangle = G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ y para todo $S \subseteq \Pi$, sea $\mathbb{T}_S := \langle K_{\alpha_i} : \ \alpha_i \in S \rangle$.

Teorema (De Concini & Lyubashenko, K. A. Brown & Goodearl)

(a) *$\mathcal{O}_\epsilon(G)$ contiene una subálgebra de Hopf central isomorfa a $\mathcal{O}(G)$.*

(b) *$\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es un $\mathcal{O}(G)$-modulo libre de rango $\ell^{\dim G}$.*

II. Subgrupos cuánticos de un grupo cuántico simple

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g} = Lie(G)$ subálgebra de Cartan, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base de un sistema de raíces $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y $n = \operatorname{rk} \mathfrak{g}$.

- ϵ raíz ℓ-ésima primitiva de 1, ℓ impar y $3 \nmid \ell$ si G es de tipo G_2.

- $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ = núcleo de Frobenius-Lusztig; generado por $\{K_{\alpha_i}, E_i, F_i : 1 \leq i \leq n\}$. Denotemos $\mathbb{T} := \langle K_{\alpha_1}, \dots, K_{\alpha_n} \rangle = G(\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}))$ y para todo $S \subseteq \Pi$, sea $\mathbb{T}_S := \langle K_{\alpha_i} : \ \alpha_i \in S \rangle$.

Teorema (De Concini & Lyubashenko, K. A. Brown & Goodearl)

(a) *$\mathcal{O}_\epsilon(G)$ contiene una subálgebra de Hopf central isomorfa a $\mathcal{O}(G)$.*

(b) *$\mathcal{O}_\epsilon(G)$ es un $\mathcal{O}(G)$-modulo libre de rango $\ell^{\dim G}$.*

(c) $\mathbb{C} \to \mathcal{O}(G) \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_\epsilon(G) \xrightarrow{\pi} \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \to \mathbb{C}$.

Caracterización

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$.

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$.
- N *subgrupo abeliano finito de* $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}}$, $I = I_+ \cup I_-$.

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$.
- N *subgrupo abeliano finito de* $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}}$, $I = I_+ \cup I_-$.
- Γ *grupo algebraico.*

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$.
- N *subgrupo abeliano finito de* $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}}$, $I = I_+ \cup I_-$.
- Γ *grupo algebraico.*
- $\sigma : \Gamma \to L \subseteq G$ *morfismo inyectivo de grupos algebraicos.*

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$.
- N *subgrupo abeliano finito de* $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}}$, $I = I_+ \cup I_-$.
- Γ *grupo algebraico.*
- $\sigma : \Gamma \to L \subseteq G$ *morfismo inyectivo de grupos algebraicos.*
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ *morfismo de grupos.*

Caracterización

Definición

Un dato de subgrupo es una 6-upla $\mathcal{D} = (I_+, I_-, N, \Gamma, \sigma, \delta)$ *tal que*

- $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$.
- N *subgrupo abeliano finito de* $\widehat{\mathbb{T}_{I^c}}$, $I = I_+ \cup I_-$.
- Γ *grupo algebraico.*
- $\sigma : \Gamma \to L \subseteq G$ *morfismo inyectivo de grupos algebraicos.*
- $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ *morfismo de grupos.*

Teorema (Andruskiewitsch, G.)

Existe una biyección entre

(a) *Cocientes de álgebras de Hopf* $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$.

(b) *Datos de subgrupo.*

Construcción

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.

Construcción

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

Construcción

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $B = q(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{O}(\Gamma)$ para algún subgrupo algebraico Γ de G

Construcción

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $B = q(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{O}(\Gamma)$ para algún subgrupo algebraico Γ de G y $H = A/AB^+$ es el cociente de Hopf dado por la inclusión $B \hookrightarrow A$.

Construcción

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\ 1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1, \end{tikzcd}$$

donde $B = q(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{O}(\Gamma)$ para algún subgrupo algebraico Γ de G y $H = A/AB^+$ es el cociente de Hopf dado por la inclusión $B \hookrightarrow A$.

Lema (Müller)

H^* está parametrizado por (I_+, I_-, Σ), donde $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$ y $\Sigma \subseteq \mathbb{T}$ es tal que $K_{\alpha_i} \in \Sigma$ si $\alpha_i \in I = I_+ \cup -I_-$.

Construcción

Sea $q : \mathcal{O}_\epsilon(G) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $B = q(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{O}(\Gamma)$ para algún subgrupo algebraico Γ de G y $H = A/AB^+$ es el cociente de Hopf dado por la inclusión $B \hookrightarrow A$.

Lema (Müller)

H^* está parametrizado por (I_+, I_-, Σ), donde $I_+ \subseteq \Pi$, $I_- \subseteq -\Pi$ y $\Sigma \subseteq \mathbb{T}$ es tal que $K_{\alpha_i} \in \Sigma$ si $\alpha_i \in I = I_+ \cup -I_-$.

Idea: Hacer la construcción usando extensiones centrales.

Primer paso

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ es una subálgebra algebraica de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$,

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ es una subálgebra algebraica de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$,

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ es una subálgebra algebraica de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$, con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \ \mathrm{Sup}\,\alpha \subseteq I_\pm\}$.

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ es una subálgebra algebraica de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$, con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \ \mathrm{Sup}\,\alpha \subseteq I_\pm\}$.

Teorema (Andruskiewitsch, G.)

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ es una subálgebra algebraica de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$, con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \ \mathrm{Sup}\,\alpha \subseteq I_\pm\}$.

Teorema (Andruskiewitsch, G.)

(a) *$\mathcal{O}(L)$ es central en $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $L \subseteq G$ es conexo y* $\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{l}$.

Primer paso

Sea $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ la subálgebra de Hopf determinada por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$.

• Usando esta terna se definen las álgebras de Hopf $\mathcal{O}(L)$, $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $U_\varepsilon(\mathfrak{l})$, donde $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}_-$ es una subálgebra algebraica de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$, $\mathfrak{l}_\pm = \sum_{\alpha\in\Psi_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$, con $\Psi_\pm = \{\alpha \in \Phi : \ \mathrm{Sup}\,\alpha \subseteq I_\pm\}$.

Teorema (Andruskiewitsch, G.)

(a) *$\mathcal{O}(L)$ es central en $\mathcal{O}_\epsilon(L)$, $L \subseteq G$ es conexo y* $\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{l}$.

(b) *El siguiente diagrama de sucesiones exactas centrales conmuta*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Segundo paso: la construcción pushout

Sea $\sigma : \Gamma \to G$ tal que $\sigma(\Gamma) \subseteq L$.

Segundo paso: la construcción pushout

Sea $\sigma : \Gamma \to G$ tal que $\sigma(\Gamma) \subseteq L$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, two heads, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1 \\
 & \mathcal{O}(\Gamma) & & &
\end{tikzcd}$$

Segundo paso: la construcción pushout

Sea $\sigma : \Gamma \to G$ tal que $\sigma(\Gamma) \subseteq L$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, two heads, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Gamma) \arrow[r, "\bar{\iota}"] & A_{\epsilon,\sigma,\mathfrak{l}} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $A_{\epsilon,\sigma,\mathfrak{l}} := \mathcal{O}_\epsilon(L)/(\mathcal{J})$, $\mathcal{J} = \operatorname{Ker}\ {}^t\sigma$, $(\mathcal{J}) = A\mathcal{J}$.

Tercer paso

Tercer paso

Sea $H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ determinado por (I_+, I_-, Σ).

Tercer paso

Sea $H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ determinado por (I_+, I_-, Σ). Como $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ está determinado por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$ con $\Sigma \subseteq \mathbb{T}$, se tiene

$$H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}).$$

Tercer paso

Sea $H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})$ determinado por (I_+, I_-, Σ). Como $\mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})$ está determinado por $(I_+, I_-, \mathbb{T})$ con $\Sigma \subseteq \mathbb{T}$, se tiene

$$H^* \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l}) \subseteq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g}).$$

Lema

$H \simeq \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^*/(D^z - 1|\ z \in N)$ donde $N \subseteq \widehat{\mathbb{T}_{I^c}}$ está determinado unicamente por Σ (y recíprocamente).

Sea $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ un morfismo de grupos.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, two heads, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Gamma) \arrow[r, "\bar{\iota}"] & A_{\epsilon,\sigma,\mathfrak{l}} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
 & & & H &
\end{tikzcd}$$

Sea $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ un morfismo de grupos. Dividimos por ideales generados por elementos centrales relacionados con Σ y obtenemos

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, two heads, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, two heads] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Gamma) \arrow[r, "\bar{\iota}"] & A_{\epsilon,\sigma,\mathfrak{l}} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
 & & & H &
\end{tikzcd}$$

Sea $\delta : N \to \widehat{\Gamma}$ un morfismo de grupos. Dividimos por ideales generados por elementos centrales relacionados con Σ y obtenemos

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & \mathcal{O}_\epsilon(G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{g})^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(L) \arrow[r, "\iota_L"] \arrow[d, "{}^t\sigma"'] & \mathcal{O}_\epsilon(L) \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Gamma) \arrow[r, "\bar{\iota}"] \arrow[d, equal] & A_{\epsilon,\sigma,\mathfrak{l}} \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d] & \mathbf{u}_\epsilon(\mathfrak{l})^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(\Gamma) \arrow[r, "\tilde{\iota}"] & A_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $A_{\mathcal{D}} = A_{\epsilon,\sigma,\mathfrak{l}}/(\psi(D^z) - \delta(z)|\ z \in N)$.

III. Subgrupos cuánticos multiparamétricos

Sea $k = \mathbb{C}$.

III. Subgrupos cuánticos multiparamétricos

Sea $k = \mathbb{C}$.

Definición (Takeuchi)

Sean $\alpha, \ \beta \in k^{\times}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ *es la* k*-álgebra generada por los elementos* $\{x_{ij} : \ 1 \leq i, j \leq n\}$ *que satisfacen:*

III. Subgrupos cuánticos multiparamétricos

Sea $k = \mathbb{C}$.

Definición (Takeuchi)

Sean $\alpha,\ \beta \in k^{\times}$ y $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ es la k-álgebra generada por los elementos $\{x_{ij} :\ 1 \leq i,j \leq n\}$ que satisfacen:

$$\begin{aligned} x_{ik}x_{ij} &= \alpha x_{ij}x_{ik} && \text{si } j < k,\\ x_{jk}x_{ik} &= \beta x_{ik}x_{jk} && \text{si } i < j,\\ x_{jk}x_{il} &= \beta\alpha^{-1}x_{il}x_{jk} && \text{y}\\ x_{jl}x_{ik} - x_{ik}x_{jl} &= (\beta - \alpha^{-1})x_{il}x_{jk} && \text{si } i < j \text{ y } k < l. \end{aligned}$$

III. Subgrupos cuánticos multiparamétricos

Sea $k = \mathbb{C}$.

Definición (Takeuchi)

Sean $\alpha, \ \beta \in k^{\times}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ *es la k-álgebra generada por los elementos* $\{x_{ij} : \ 1 \leq i, j \leq n\}$ *que satisfacen:*

$$\begin{aligned} x_{ik}x_{ij} &= \alpha x_{ij}x_{ik} && \text{si } j < k, \\ x_{jk}x_{ik} &= \beta x_{ik}x_{jk} && \text{si } i < j, \\ x_{jk}x_{il} &= \beta\alpha^{-1}x_{il}x_{jk} && \text{y} \\ x_{jl}x_{ik} - x_{ik}x_{jl} &= (\beta - \alpha^{-1})x_{il}x_{jk} && \text{si } i < j \text{ y } k < l. \end{aligned}$$

• $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ es un álgebra polinomial no conmutativa en las variables x_{ij} sin divisores de 0.

III. Subgrupos cuánticos multiparamétricos

Sea $k = \mathbb{C}$.

Definición (Takeuchi)

Sean $\alpha,\ \beta \in k^\times$ y $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ es la k-álgebra generada por los elementos $\{x_{ij} :\ 1 \le i,j \le n\}$ que satisfacen:

$$
\begin{aligned}
x_{ik}x_{ij} &= \alpha x_{ij}x_{ik} && \text{si } j < k,\\
x_{jk}x_{ik} &= \beta x_{ik}x_{jk} && \text{si } i < j,\\
x_{jk}x_{il} &= \beta\alpha^{-1}x_{il}x_{jk} && \text{y}\\
x_{jl}x_{ik} - x_{ik}x_{jl} &= (\beta - \alpha^{-1})x_{il}x_{jk} && \text{si } i < j \text{ y } k < l.
\end{aligned}
$$

- $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ es un álgebra polinomial no conmutativa en las variables x_{ij} sin divisores de 0. Es una biálgebra con

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} x_{is} \otimes x_{sj} \quad \text{y} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

III. Subgrupos cuánticos multiparamétricos

Sea $k = \mathbb{C}$.

Definición (Takeuchi)

Sean $\alpha,\ \beta \in k^{\times}$ y $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ es la k-álgebra generada por los elementos $\{x_{ij} :\ 1 \leq i, j \leq n\}$ que satisfacen:

$$
\begin{aligned}
x_{ik}x_{ij} &= \alpha x_{ij}x_{ik} && \text{si } j < k,\\
x_{jk}x_{ik} &= \beta x_{ik}x_{jk} && \text{si } i < j,\\
x_{jk}x_{il} &= \beta\alpha^{-1} x_{il}x_{jk} && \text{y}\\
x_{jl}x_{ik} - x_{ik}x_{jl} &= (\beta - \alpha^{-1}) x_{il}x_{jk} && \text{si } i < j \text{ y } k < l.
\end{aligned}
$$

• $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ es un álgebra polinomial no conmutativa en las variables x_{ij} sin divisores de 0. Es una biálgebra con

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} x_{is} \otimes x_{sj} \quad \text{y} \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Se define el *determinante cuántico* g como

Se define el *determinante cuántico* g como

$$g = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}^{n} (-\beta)^{-\ell(\sigma)} x_{\sigma(1),1}\cdots x_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}^{n} (-\alpha)^{-\ell(\sigma)} x_{1,\sigma(1)}\cdots x_{n,\sigma(n)},$$

donde $\mathbb{S}_n$ es el grupo simétrico y $\ell(\sigma)$ denota la longitud.

Se define el *determinante cuántico* g como

$$g = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n}^{n} (-\beta)^{-\ell(\sigma)} x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n}^{n} (-\alpha)^{-\ell(\sigma)} x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)},$$

donde $\mathbb{S}_n$ es el grupo simétrico y $\ell(\sigma)$ denota la longitud.

- g es un elemento de tipo grupo que cumple que

$$x_{ij} g = (\beta\alpha^{-1})^{i-j} g x_{ij} \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

- Las potencias de g satisfacen la condiciones Ore:

- Las potencias de g satisfacen la condiciones Ore: la localización de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ da un álgebra de Hopf $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) := \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)[g^{-1}]$.

• Las potencias de g satisfacen la condiciones Ore: la localización de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ da un álgebra de Hopf $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) := \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)[g^{-1}]$. La antípoda $\mathcal{S}$ está determinada por

$$\mathcal{S}(x_{ij}) = (-\beta)^{j-i} g^{-1} |X_{ji}| = (-\alpha)^{j-i} |X_{ji}| g^{-1},$$

• Las potencias de g satisfacen la condiciones Ore: la localización de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ da un álgebra de Hopf $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) := \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)[g^{-1}]$. La antípoda $\mathcal{S}$ está determinada por

$$\mathcal{S}(x_{ij}) = (-\beta)^{j-i} g^{-1} |X_{ji}| = (-\alpha)^{j-i} |X_{ji}| g^{-1},$$

En particular, $\mathcal{S}^2(x_{ij}) = (\alpha\beta)^{j-i} x_{ij}$.

• Las potencias de g satisfacen la condiciones Ore: la localización de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ da un álgebra de Hopf $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) := \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)[g^{-1}]$. La antípoda $\mathcal{S}$ está determinada por

$$\mathcal{S}(x_{ij}) = (-\beta)^{j-i} g^{-1} |X_{ji}| = (-\alpha)^{j-i} |X_{ji}| g^{-1},$$

En particular, $\mathcal{S}^2(x_{ij}) = (\alpha\beta)^{j-i} x_{ij}$.

• Tomando $(\alpha, \beta) = (q, q)$ o $(1, q)$ se obtienen las deformaciones usuales de $\mathcal{O}(GL_n)$ (Dipper-Donkin, Jimbo).

• Las potencias de g satisfacen la condiciones Ore: la localización de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)$ da un álgebra de Hopf $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) := \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n)[g^{-1}]$. La antípoda $\mathcal{S}$ está determinada por

$$\mathcal{S}(x_{ij}) = (-\beta)^{j-i} g^{-1} |X_{ji}| = (-\alpha)^{j-i} |X_{ji}| g^{-1},$$

En particular, $\mathcal{S}^2(x_{ij}) = (\alpha\beta)^{j-i} x_{ij}$.

• Tomando $(\alpha, \beta) = (q, q)$ o $(1, q)$ se obtienen las deformaciones usuales de $\mathcal{O}(GL_n)$ (Dipper-Donkin, Jimbo).

• [Takeuchi] Las álgebras de Hopf $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ no se pueden obtener como *twist* de $\mathcal{O}(GL_n)$.

Definición (Benkart-Witherspoon, Takeuchi)

Definición (Benkart-Witherspoon, Takeuchi)

Sean $\alpha \neq \beta$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ es la k-álgebra generada por los elementos $\{a_i, a_i^{-1}, b_i, b_i^{-1}, e_j, f_j : \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < n\}$

Definición (Benkart-Witherspoon, Takeuchi)

Sean $\alpha \neq \beta$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ es la k-álgebra generada por los elementos $\{a_i, a_i^{-1}, b_i, b_i^{-1}, e_j, f_j :\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < n\}$ que satisfacen

$$
\begin{aligned}
a_i, b_k & \qquad \text{conmutan entre sí, } a_i a_i^{-1} = a_i^{-1} a_i = b_i b_i^{-1} = b_i^{-1} b_i = 1, \\
a_i e_j &= \alpha^{\delta_{ij} - \delta_{i,j+1}} e_j a_i, \qquad b_i e_j = \beta^{\delta_{ij} - \delta_{i,j+1}} e_j b_i \\
a_i f_j &= \alpha^{-\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}} f_j a_i, \qquad b_i f_j = \beta^{-\delta_{ij} + \delta_{i,j+1}} f_j b_i, \\
[e_j, f_l] &= \frac{\delta_{jl}}{\alpha - \beta}(a_j b_{j+1} - a_{j+1} b_j), \\
[e_j, e_l] &= [f_j, f_l] = 0 \qquad \text{if } |j - l| > 1, \\
0 &= e_j^2 e_{j+1} - (\alpha + \beta) e_j e_{j+1} e_j + \alpha\beta e_{j+1} e_j^2, \qquad (1) \\
0 &= e_j e_{j+1}^2 - (\alpha + \beta) e_{j+1} e_j e_{j+1} + \alpha\beta e_{j+1}^2 e_j, \\
0 &= f_j^2 f_{j+1} - (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) f_j f_{j+1} f_j + \alpha^{-1}\beta^{-1} f_{j+1} f_j^2, \qquad (2) \\
0 &= f_j f_{j+1}^2 - (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) f_{j+1} f_j f_{j+1} + \alpha^{-1}\beta^{-1} f_{j+1}^2 f_j,
\end{aligned}
$$

- Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$.

- Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ tiene una estructura de álgebra de Hopf determinada por:

- Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ tiene una estructura de álgebra de Hopf determinada por:

$$\begin{aligned} \Delta(a_i) &= a_i \otimes a_i, & \qquad \Delta(b_i) &= b_i \otimes b_i, \\ \Delta(e_j) &= e_j \otimes 1 + w_j \otimes e_j \quad \text{y} & \qquad \Delta(f_j) &= 1 \otimes f_j + f_j \otimes w'_j. \end{aligned}$$

• Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ tiene una estructura de álgebra de Hopf determinada por:

$$
\begin{aligned}
\Delta(a_i) &= a_i \otimes a_i, & & \Delta(b_i) = b_i \otimes b_i, \\
\Delta(e_j) &= e_j \otimes 1 + w_j \otimes e_j & \text{y} \quad & \Delta(f_j) = 1 \otimes f_j + f_j \otimes w'_j.
\end{aligned}
$$

• Tomando diferentes valores de α, β, se obtienen las deformaciones en un parámetro conocidas de $U(\mathfrak{gl}_n)$ como cocientes de ésta (Drinfeld-Jimbo).

- Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ tiene una estructura de álgebra de Hopf determinada por:

$$\Delta(a_i) = a_i \otimes a_i, \qquad \Delta(b_i) = b_i \otimes b_i,$$
$$\Delta(e_j) = e_j \otimes 1 + w_j \otimes e_j \quad \text{y} \quad \Delta(f_j) = 1 \otimes f_j + f_j \otimes w'_j.$$

- Tomando diferentes valores de α, β, se obtienen las deformaciones en un parámetro conocidas de $U(\mathfrak{gl}_n)$ como cocientes de ésta (Drinfeld-Jimbo).

- Admite una descomposición triangular

- Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ tiene una estructura de álgebra de Hopf determinada por:

$$\begin{aligned} \Delta(a_i) &= a_i \otimes a_i, & \qquad & \Delta(b_i) = b_i \otimes b_i, \\ \Delta(e_j) &= e_j \otimes 1 + w_j \otimes e_j & \text{y} \qquad & \Delta(f_j) = 1 \otimes f_j + f_j \otimes w'_j. \end{aligned}$$

- Tomando diferentes valores de α, β, se obtienen las deformaciones en un parámetro conocidas de $U(\mathfrak{gl}_n)$ como cocientes de ésta (Drinfeld-Jimbo).

- Admite una descomposición triangular

$$U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) = U^{-}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \otimes U^{\circ}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \otimes U^{+}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n),$$

• Sean $w_j = a_j b_{j+1}$ y $w'_j = a_{j+1} b_j$ para $1 \leq j < n$. $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ tiene una estructura de álgebra de Hopf determinada por:

$$\begin{aligned} \Delta(a_i) &= a_i \otimes a_i, & \qquad & \Delta(b_i) = b_i \otimes b_i, \\ \Delta(e_j) &= e_j \otimes 1 + w_j \otimes e_j & \text{y} \qquad & \Delta(f_j) = 1 \otimes f_j + f_j \otimes w'_j. \end{aligned}$$

• Tomando diferentes valores de α, β, se obtienen las deformaciones en un parámetro conocidas de $U(\mathfrak{gl}_n)$ como cocientes de ésta (Drinfeld-Jimbo).

• Admite una descomposición triangular

$$U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) = U^-_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \otimes U^\circ_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \otimes U^+_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n),$$

donde $U^+_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$, $U^-_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ y $U^\circ_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ son las subálgebras generadas por $\{e_i\}_{1\leq i<n}$, $\{f_i\}_{1\leq i<n}$ y $\{a_j^{\pm 1}, b_j^{\pm 1}\}_{1\leq j\leq n}$, respectivamente.

- Si $\alpha \neq -\beta$, $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ admite una base PBW.

- Si $\alpha \neq -\beta$, $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ admite una base PBW.
- Existe una versión en dos parámetros de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$:

- Si $\alpha \neq -\beta$, $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ admite una base PBW.

- Existe una versión en dos parámetros de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$: subálgebra de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ generada por los elementos e_j, f_j, w_j, w_j^{-1}, w_j' y $(w_j')^{-1}$ para $1 \leq j < n$.

- Si $\alpha \neq -\beta$, $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ admite una base PBW.

- Existe una versión en dos parámetros de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$: subálgebra de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ generada por los elementos e_j, f_j, w_j, w_j^{-1}, w_j' y $(w_j')^{-1}$ para $1 \leq j < n$. Si $(\alpha, \beta) = (q, q)$, esta subálgebra es $U_q(\mathfrak{sl}_n)$.

- Si $\alpha \neq -\beta$, $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ admite una base PBW.

- Existe una versión en dos parámetros de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$: subálgebra de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ generada por los elementos e_j, f_j, w_j, w_j^{-1}, w'_j y $(w'_j)^{-1}$ para $1 \leq j < n$. Si $(\alpha, \beta) = (q, q)$, esta subálgebra es $U_q(\mathfrak{sl}_n)$.

- [Benkart-Witherspoon] existe un apareamiento dual de álgebras de Hopf entre $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ y $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ dado por

• Si $\alpha \neq -\beta$, $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ admite una base PBW.

• Existe una versión en dos parámetros de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$: subálgebra de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ generada por los elementos e_j, f_j, w_j, w_j^{-1}, w_j' y $(w_j')^{-1}$ para $1 \leq j < n$. Si $(\alpha, \beta) = (q, q)$, esta subálgebra es $U_q(\mathfrak{sl}_n)$.

• [Benkart-Witherspoon] existe un apareamiento dual de álgebras de Hopf entre $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ y $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ dado por

$$\langle a_i, x_{st} \rangle = \delta_{st}\alpha^{\delta_{is}}, \qquad \langle b_i, x_{st} \rangle = \delta_{st}\beta^{\delta_{is}},$$
$$\langle e_j, x_{st} \rangle = \delta_{js}\delta_{j+1,t}, \qquad \langle f_j, x_{st} \rangle = \delta_{j+1,s}\delta_{jt}.$$

Subgrupos cuánticos finitos con $\alpha\beta$ no raíz de 1

Subgrupos cuánticos finitos con $\alpha\beta$ no raíz de 1

Teorema

Si α o β no son raíces de la unidad, entonces los cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ son las álgebras de funciones sobre subgrupos finitos del toro diagonal en $GL_n(k)$.

Subgrupos cuánticos finitos con $\alpha\beta$ no raíz de 1

Teorema

Si α o β no son raíces de la unidad, entonces los cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ son las álgebras de funciones sobre subgrupos finitos del toro diagonal en $GL_n(k)$.

Demostración.

Subgrupos cuánticos finitos con $\alpha\beta$ no raíz de 1

Teorema

Si α o β no son raíces de la unidad, entonces los cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ son las álgebras de funciones sobre subgrupos finitos del toro diagonal en $GL_n(k)$.

Demostración.

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \to A$ morfismo suryectivo de álgebras de Hopf,
$\dim A < \infty$.

Subgrupos cuánticos finitos con $\alpha\beta$ no raíz de 1

Teorema

Si α o β no son raíces de la unidad, entonces los cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ son las álgebras de funciones sobre subgrupos finitos del toro diagonal en $GL_n(k)$.

Demostración.

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \to A$ morfismo suryectivo de álgebras de Hopf, $\dim A < \infty$. Entonces, $\mathcal{S}_A$ tiene orden finito, digamos $2t$. Pero

$$q(x_{ij}) = \mathcal{S}_A^{2t}(q(x_{ij})) = q(\mathcal{S}^{2t}(x_{ij})) = (\alpha\beta)^{t(j-i)}q(x_{ij}).$$

Subgrupos cuánticos finitos con $\alpha\beta$ no raíz de 1

Teorema

Si α o β no son raíces de la unidad, entonces los cocientes de dimensión finita de $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ son las álgebras de funciones sobre subgrupos finitos del toro diagonal en $GL_n(k)$.

Demostración.

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \to A$ morfismo suryectivo de álgebras de Hopf, $\dim A < \infty$. Entonces, $\mathcal{S}_A$ tiene orden finito, digamos $2t$. Pero

$$q(x_{ij}) = \mathcal{S}_A^{2t}(q(x_{ij})) = q(\mathcal{S}^{2t}(x_{ij})) = (\alpha\beta)^{t(j-i)}q(x_{ij}).$$

Esto implica que $q(x_{ij}) = 0$ para todo $i \neq j$ y por lo tanto A es un cociente de $k[x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}]$. $\square$

Subgrupos cuánticos con $\alpha\beta$ raíz de 1

Subgrupos cuánticos con $\alpha\beta$ raíz de 1

- Sea $N = \operatorname{ord} \alpha\beta$ y supongamos $\alpha^N = 1 = \beta^N$.

Subgrupos cuánticos con $\alpha\beta$ raíz de 1

- Sea $N = \operatorname{ord} \alpha\beta$ y supongamos $\alpha^N = 1 = \beta^N$.
- [Du-Parshall-Wang] Generalización del morfismo cuántico de Frobenius

$$F^{\#}: \quad \mathcal{O}(M_n) \to \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n), \qquad X_{ij} \mapsto x_{ij}^N$$

Subgrupos cuánticos con $\alpha\beta$ raíz de 1

- Sea $N = \operatorname{ord} \alpha\beta$ y supongamos $\alpha^N = 1 = \beta^N$.
- [Du-Parshall-Wang] Generalización del morfismo cuántico de Frobenius

$$F^{\#}: \quad \mathcal{O}(M_n) \to \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n), \qquad X_{ij} \mapsto x_{ij}^N$$

Es un monomorfismo de álgebras de Hopf que satisface $F^{\#}(|X|) = g^N$.

Subgrupos cuánticos con $\alpha\beta$ raíz de 1

- Sea $N = \operatorname{ord}\alpha\beta$ y supongamos $\alpha^N = 1 = \beta^N$.
- [Du-Parshall-Wang] Generalización del morfismo cuántico de Frobenius

$$F^{\#}: \quad \mathcal{O}(M_n) \to \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n), \qquad X_{ij} \mapsto x_{ij}^N$$

Es un monomorfismo de álgebras de Hopf que satisface $F^{\#}(|X|) = g^N$. En particular, $F^{\#}$ se extiende a un monomorfismo de álgebras de Hopf

$$F^{\#}: \mathcal{O}(GL_n) \to \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n).$$

Subgrupos cuánticos con $\alpha\beta$ raíz de 1

- Sea $N = \operatorname{ord} \alpha\beta$ y supongamos $\alpha^N = 1 = \beta^N$.
- [Du-Parshall-Wang] Generalización del morfismo cuántico de Frobenius

$$F^{\#}: \quad \mathcal{O}(M_n) \to \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(M_n), \qquad X_{ij} \mapsto x_{ij}^N$$

Es un monomorfismo de álgebras de Hopf que satisface $F^{\#}(|X|) = g^N$. En particular, $F^{\#}$ se extiende a un monomorfismo de álgebras de Hopf

$$F^{\#}: \mathcal{O}(GL_n) \to \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n).$$

Proposición (Du-Parshall-Wang)

(i) *$\mathcal{O}(GL_n)$ es central en $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$, $\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$ es f. p. sobre $\mathcal{O}(GL_n)$.*

(ii) $\dim \overline{H} := \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)/\mathcal{O}(GL_n)^{+}\mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) = \ell^{n^2}$.

□

Supongamos que $N \neq 2$.

Supongamos que $N \neq 2$. Tomando el cociente de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ por elementos centrales se obtiene un nuevo grupo cuántico $\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ que es un cociente del grupo cuántico restringido $u_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$.

Supongamos que $N \neq 2$. Tomando el cociente de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ por elementos centrales se obtiene un nuevo grupo cuántico $\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ que es un cociente del grupo cuántico restringido $u_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$.

Lema

Supongamos que $N \neq 2$. Tomando el cociente de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ por elementos centrales se obtiene un nuevo grupo cuántico $\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ que es un cociente del grupo cuántico restringido $u_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$.

Lema

(a) *$\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ es un álgebra de Hopf punteada de dimensión ℓ^{n^2}.*

Supongamos que $N \neq 2$. Tomando el cociente de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ por elementos centrales se obtiene un nuevo grupo cuántico $\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ que es un cociente del grupo cuántico restringido $u_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$.

Lema

(a) *$\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ es un álgebra de Hopf punteada de dimensión ℓ^{n^2}.*

(b) *El apareamiento de Hopf $\langle -, - \rangle : U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \times \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \to k$ induce*

$$\langle -, - \rangle' : \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \times \overline{H} \to k.$$

Supongamos que $N \neq 2$. Tomando el cociente de $U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ por elementos centrales se obtiene un nuevo grupo cuántico $\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ que es un cociente del grupo cuántico restringido $u_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$.

Lema

(a) *$\hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ es un álgebra de Hopf punteada de dimensión ℓ^{n^2}.*

(b) *El apareamiento de Hopf $\langle -, - \rangle : U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \times \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \to k$ induce*

$$\langle -, - \rangle' : \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n) \times \overline{H} \to k.$$

(c) *El morfismo de álgebras de Hopf $\psi : \overline{H} \to \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)^*$ dado por $\psi(\pi(x))(r(u)) = \langle r(h), \pi(x) \rangle'$ para todo $x \in \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n)$, $h \in U_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)$ es inyectivo. En particular, $\overline{H} \simeq \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)^*$.*

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(GL_n) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(GL_n) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $B = q(\mathcal{O}(GL_n)) = \mathcal{O}(\Gamma)$ para algún subgrupo Γ de GL_n

Sea $q : \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo de álgebras de Hopf.
Se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas centrales

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}(GL_n) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{O}_{\alpha,\beta}(GL_n) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, two heads, "q"] & \hat{u}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{gl}_n)^* \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & B \arrow[r, "\hat{\iota}"] & A \arrow[r, "\hat{\pi}"] & H \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $B = q(\mathcal{O}(GL_n)) = \mathcal{O}(\Gamma)$ para algún subgrupo Γ de GL_n y $H = A/AB^+$ es el cociente de Hopf dado por la inclusión $B \hookrightarrow A$.