CUANTIZACION POR DEFORMACION Y CATEGORIFICACION

Rafael Díaz

UNEFA, Venezuela

Los resultados presentados en esta charla son trabajo conjunto con

Eddy Pariguan
Universidad Javeriana
Colombia

y estan incluidos en el trabajo:

- R. Díaz, E. Pariguan, Super, quantum and noncommutative species, arXiv:math.CT/0509674.

En otros trabajos subsiguientes se han desarrollado algunas de estas ideas por ejemplo en:

- H. Blandín, R. Díaz, Rational combinatorics, Adv. Appl. Math. 40 (2008) 107-126.
- H. Blandín, R. Díaz, Compositional Bernoulli Numbers, Afr. Diaspora J. Math., in press.
- E. Castillo, R. Díaz, Rota-Baxter categories, arXiv:math.CT/0706.1068.
- R. Díaz, E. Pariguan, On the q-meromorphic Weyl algebra, arXiv 2008.

Introduction

En esta charla queremos discutir un ejemplo de la intima relacion entre matematicas y fisica cuantica, uno que a primera vista luce completamente inexplicable: queremos estudiar fisica cuantica por medio de categorias y funtores.

Me enfocare primordialmente en el analisis combinatorio, para hacer esta charla mas sencilla, sin embargo los metodos usados aplican en un contexto categorico general con pocos cambios.

Paso a explicar entonces el contexto categorico, el cual esta basado en la nocion de categorificacion estudiada por Baez, Dolan, Khovanov, Crane, Yetter.

Categorification de anillos

Recordamos que una categoria monoidal es una categoria C junto con un bifuntor

$$\otimes : C \times C \longrightarrow C$$

y isomorfismos naturales

$$\alpha_{x,y,z} : x \otimes (y \otimes z) \longrightarrow (x \otimes y) \otimes z$$

tal que se satisface el pentagono de Mac Lane.

Una categoria simetrica monoidal es una categoria monoidal C junto con isomorfismos naturales

$$s_{x,y} : x \otimes y \longrightarrow y \otimes x$$

tales que $s_{x,y} \circ s_{y,x} = 1$ y se satisface el hexagono de Mac Lane.

Una categorificacion de un anillo R es un triple

$$(C, N, |\ \ |)$$

donde C es unaa categoria, $N : C \longrightarrow C$ es un funtor, llamado el funtor negativo, y $|\ \ | : C \longrightarrow R$ es una aplicacion llamada la valuacion. Estos objetos deben satifascer las siguientes condiciones:

- C es una categoria distributiva, es decir C esta dotada con bifuntores $\oplus : C \times C \longrightarrow C$ y $\otimes : C \times C \longrightarrow C$ llamados suma and producto, respectivamente. Los funtores $\oplus$ y $\otimes$ son tales que:
  - Hay objetos distinguidos 0 y 1 en C.
  - El triple $(C, \oplus, 0)$ es una categoria simetrica monoidal con unidad 0.
  - El triple $(C, \otimes, 1)$ es una categoria monoidal con unidad 1.
  - La propiedad distributiva se satisface. Para x, y, z en C hay isomorfismos naturales $x \otimes (y \oplus z) \simeq (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ y $(x \oplus y) \otimes z \simeq (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$.

- El funtor $N : C \longrightarrow C$ es tal que para $x, y \in C$ se satisface: $N(x \oplus y) = N(x) \oplus N(y)$, $N(0) = 0$, $N^2 = I$ (funtor identidad).
- La aplicacion $|\ \ | : C \longrightarrow R$ es tal que para $x, y \in C$ tenemos:
  - $|x| = |y|$ si x e y son isomorfos.
  - $|x \oplus y| = |x| + |y|$, $|x \otimes y| = |x||y|$, $|1| = 1$, y $|0| = 0$.
  - $|N(x)| = -|x|$.

Algunos comentarios sobre la nocion de categorificacion.

Si R es un semi-anillo entonces una categorificacion de R se define como en el caso de anillos omitiendo el funtor N. Hay un procedimiento natural que convierte categorificaciones de semi-anillos en categorificaciones de anillos (como pasar de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$) por tanto en muchos casos es suficiente considerar el caso de semi-anillos.

No exigimos que $\oplus$ y $\otimes$ sean el co-producto y el producto de C.

Solo requerimos que $|a \oplus N(a)| = 0$. Exigir que $a \oplus N(a)$ sea isomorfo a 0 reduciria drasticamente el alcance de nuestra definicion. Uno usualmente escribe $-a$ en lugar de $N(a)$.

Una categorificacion es sobreyectiva si la valuacion es sobreyectiva.

Cada anillo R es una categorificacion de si mismo si se le considera como la categoria con objetos R y solo con morfismos identidades. La valuacion es la aplicacion identidad.

No hay problema de existencia vinculados con la nocion de categorificacion: todos los anillos tienen al menos una categorificacion.

La filosofia detras de la nocion de categorificacion es que es posible obtener informacion de gran valor sobre un anillo mirando a sus diferentes categorificaciones.

Ejemplos

Sea set la categoria monoidal cuyos objetos son conjuntos finitos y sus morfismos funciones.

La estructura distributiva sobre set esta dada por union disjunta $x \sqcup y$ y producto Cartesiano $x \times y$.

La aplicacion $| \ \ | : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{N}$ que envia al conjunto x en su cardinalidad $|x|$ define una $\mathbb{N}$-valuacion sobre set.

Sea $vect$ la categoria de espacios vectoriales de dimension finita.

$vect$ es una categoria distributiva con $V \oplus W$ y $V \otimes W$ definidas como la suma directa y el producto tensorial usual para espacios vectoriales.

La aplicacion $| \ \ | : vect \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $|V| = \dim(V)$ define una $\mathbb{N}$-valuacion sobre $vect$.

Sea $\mathbb{Z}_2$-$vect$ la categoria de espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados.

Sean $V, W \in \mathbb{Z}_2$-$vect$ dados por $V = V_0 \oplus V_1$ and $W = W_0 \oplus W_1$. La suma y el producto sobre $\mathbb{Z}_2$-$vect$ dados por

$$V \oplus W = (V_0 \oplus W_0) \oplus (V_1 \oplus W_1)$$

$$V \otimes W = [(V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1)] \oplus [(V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0)]$$

La aplicacion $| \ \ | : \mathbb{Z}_2$-$vect \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $|V_0 \oplus V_1| = \dim(V_0) - \dim(V_1)$ define una $\mathbb{Z}$-valuacion sobre $\mathbb{Z}_2$-$vect$.

La funcion de Möbius $\mu : x \times x \longrightarrow \mathbb{Z}$ de un conjunto parcialmente ordenado $(x, \leq)$ se define de la siguiente manera: si $i, k \in x$ son incomparables entonces $\mu(i, k) = 0$. Para $i \leq k$ la funcion de Möbius satisface la recursion:

$$\sum_{i \leq j \leq k} \mu(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = k \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$mposet$ denota la subcategoria full de la categoria de posets cuyos objetos son posets $(x, \leq)$ tales que cada clase de equivalencia bajo la relacion en x generada por $\leq$ tiene un elemento minimal y un elemento maximal. El funtor suma es la union disjunta de posets y el funtor producto el el producto Cartesiano de posets. La aplicacion $|\ | : mposet \longrightarrow \mathbb{Z}$ given by

$$|(x, \leq)| = \sum_c \mu(m_c, M_c),$$

donde la suma corre sobre las clases de equivalencias c, y m_c and M_c denotan, respectivamente, el minimo y el maximo de c. La aplicacion $|\ |$ define una $\mathbb{Z}$-valuacion sobre la categoria $mposet$.

Sea ωman la categoria de pares (M, ω) donde M es una union disjunta de variedades suaves orientadas y ω es una aplicacion que envia cada componente c de M en una forma differential tope $\omega(c) \in \Omega^{\dim(c)}(c)$. Un morfismo es una aplicacion suave $f : M \longrightarrow N$ tal que $f^*\omega_N = \omega_M$. El funtor suma ωman es union disjunta y el funtor producto es el producto Cartesiano. La aplicacion $\omega_{M\times N}$ envia la componente $c \times d$ en

$$\omega_{M\times N}(c \times d) = \pi_M^*\omega_M(c) \wedge \pi_N^*\omega_N(d),$$

donde $\pi_M(\pi_N)$ es la proyeccion de $M \times N$ sobre $M(N)$. La aplicaicon $|\ \ | : \omega man \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|(M, \omega)| = \sum_{c\in\pi_0(M)} \int_c \omega(c)$$

define una $\mathbb{R}$-valuacion sobre ωman por el teorema de Fubini.

Sea top la categoria de espacios topologicos con grupos de cohomology sobre $\mathbb{C}$ de dimension finita. Funtor suma es union disjunta y el funtor producto es producto Cartesiano. Por la formula de Künneth la aplicacion $|\ \ | : top \longrightarrow \mathbb{C}[[t]]$ dada por

$$|X| = \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}}(H^i(X))t^i$$

define una $\mathbb{C}[[t]]$-valuacion sobre top.

Sea gpd la categoria de grupoides finitos. Recordamos (Baez-Dolan) que un gropoide finito G es una categoria tal que los objetos de G forman un conjunto finito, $G(x,y)$ es un conjunto finito para $x,y \in G$, y todos los morfismos en G son invertibles. Funtores producto y suma en gpd son el producto Cartesiano y la union disjunta para categorias. La valuacion $|\ \ | : gpd \longrightarrow \mathbb{Q}$ esta dada por

$$|G| = \sum_{x \in D(G)} \frac{1}{|G(x,x)|}.$$

Este ejemplo es la base para el desarrollo de un marco general pare el estudio de la combinatoria de los numeros racionales (Diaz, Blandin, Rational Combinatorics, Adv. Appl. Math.)

Quizas la K-teoria sea uno de los ejemplos mas conocidos de categorificacion. Sea M un espacio topologico compacto y $vect_M$ la categoria de fibrados vectoriales de rango finito sobre M. La aplicacion canonica $\pi : vect_M \longrightarrow K_0(M)$ define una valuation.

PROBLEMA: CATEGORIFICAR ANILLOS DE FUNCIONES CUANTICAS

Por ejemplo anillos de funciones obtenidad por el metodo de cuantizacion por deformacion, grupos cuanticos, etc.

Veremos que en para espacios afines el problema se puede atacar estudiando estructuras distributivas çuanticas"en la categoria $\mathbb{B}^C$ de funtores

$$\mathbb{B}^d \longrightarrow C$$

donde d es un entero positivo que define la dimension del problema, $\mathbb{B}$ es la categoria de conjuntos finitos y biyecciones y C es una categorificacion del anillo R en el cual toman valores las funciones a cuantizar.

La relacion entre funtores

$$F : \mathbb{B}^d \longrightarrow C$$

esta dado por la aplicacion

$$|F| = \sum_{n=0}^{\infty} |F\{[n_1], ..., [n_d]\}| \frac{x^n}{n!}$$

donde

$$[n] = \{1, ..., n\}.$$

En nuestra opinion uno de los metodos de cuantizacion (basado en los trabajos de Moyal, Weyl y Wigner) mas adecuado para su estudio por medio de categorias y funtores es

Cuantizacion por deformacion.

Este metodo (Flato, Lichnerowicz, and Sternheimer 1974-76) identifica la nocion de cuantizacion con la transicion

$$A \longrightarrow A[[\hbar]]$$

- A es el algebra de funciones sobre el espacio de fases,
- $A[[\hbar]]$ es un algebra asociativa pero no-commutativa en general. El producto $\star$ sobre $A[[\hbar]]$ es llamado el producto estrella.
- El parametro de deformacion $\hbar$ se asume pequeno. Y si uno toma $hbar = 0$ entonces uno tiene una identificacion entre $A[[\hbar]]$ y A.

El espacio de fases de cualquier teoria fisica lagrangeana tiene una estructura natural de variedad de Poisson.

PROBLEMA: Existencia y clasificacion de la cuantizacion por deformacion de variedades de Poisson.

- La cuantizacion por deformacion de variedades simplecticas fue demostrada por De Wilde and Lecomte 83, Fedosov 96, Omori, Maeda and Yoshioka 91.
- El caso general fue demostrado por Kontsevich 98, quien ademas demuestra que la cuantizacion es esencialmente unica.

PROBLEMA: Entender el significado y las propiedades del producto cuantico.

Cateforificacion del producto $\star$

Una variedad de Poisson es un par $(M, \{\ ,\ \})$ donde: M es una variedad suave, y el corchete

$$\{\ ,\ \} : C^\infty(M) \otimes C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

es tal que

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$, para $f, g \in C^\infty(M)$.
- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$, para $f, g, h \in C^\infty(M)$.
- $\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$, para $f, g, h \in C^\infty(M)$.
- $\{,\}$ es un operador local bi-diferencial.

Los axiomas significan que

$$\{f,g\}(x) = \alpha^{ij}\partial_i f \partial_j g$$

en cordenadas locales $x_1, \ldots, x_m$ donde α^{ij} es antisimetrico.

Una deformacion formal de $C^\infty(M)$ es un producto estrella

$$\star : C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes_{\mathbb{R}[[\hbar]]} C^\infty(M)[[\hbar]] \longrightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$$

tal que:

1. $\star$ es asociativa.
2. $f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(f,g)\hbar^n$, donde $B_n(-,-)$ son operadores bi-diferenciales.
3. $f \star g = fg + \frac{1}{2}\{f,g\}\hbar + O(\hbar^2)$, donde $O(\hbar^2)$ son terminos de orden $\hbar^2$.

Kontsevich 98 construyo un producto $\star$ para cualquier variedad de Poisson de dimension FINITA.

Para la variedad $(\mathbb{R}^m, \alpha)$ con bi-vector de Poisson α el producto $\star$ esta dado por la formula

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \sum_{\Gamma \in D(\mathcal{G}_{n,2})} \omega_\Gamma B_{\Gamma,\alpha}(f,g), \tag{1}$$

donde $\mathcal{G}_{n,2}$ es la coleccion de grafos admisibles y ω_Γ son constantes independientes de m y α.

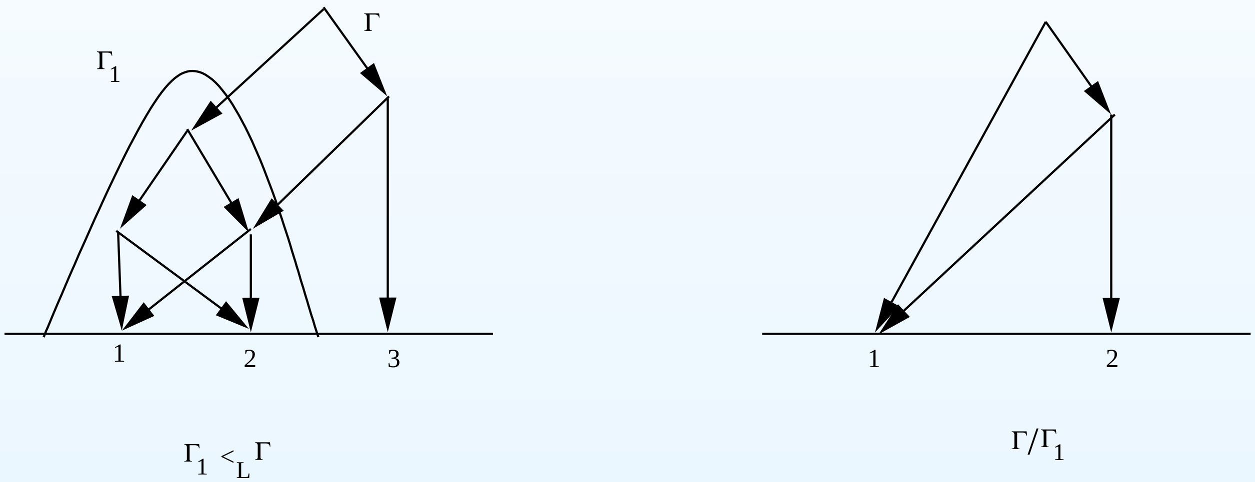
Para estudiar $(\mathbb{R}^m, \alpha)$ desde un punto de vista categorico asumimos que:

1. Para $1 \leq i \neq j \leq m$ asumimos dados objetos $A^{ij} \in O(C^{\mathbb{B}^m})$ tales que $|A^{ij}| = \alpha^{ij}$.
2. Hay un funtor $\Omega : \bigsqcup_{k\geq 0} \mathcal{G}_{k,2} \rightarrow C$ que envia a Γ en Ω_Γ y que hay isomorfismos naturales

$$\sum_{\Gamma_1 <_L \Gamma} \Omega_{\Gamma_1} \times \Omega_{\Gamma/\Gamma_1} \simeq \sum_{\Gamma_2 <_R \Gamma} \Omega_{\Gamma/\Gamma_2} \times \Omega_{\Gamma_2}$$

   making the pentagon and hexagon axioms hold.

El orden $<$ sobre grafos admisibles se define por:



Bajo estas condiciones uno define el producto estrella categorico de la siguiente manera :

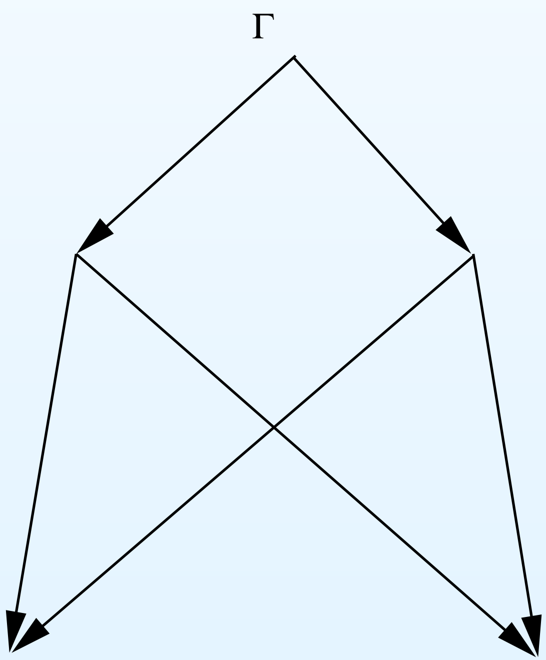
$$F \star G(x,f,y) = \coprod_{y_1 \sqcup y_2 \sqcup y_3 = y} \; \coprod_{\Gamma \in \mathcal{G}_{|y_3|,2}} \; \coprod_{I:E_\Gamma \to [m]} \Omega_\Gamma \times A_{\Gamma,I,b} \times B_{\Gamma,I,b}$$

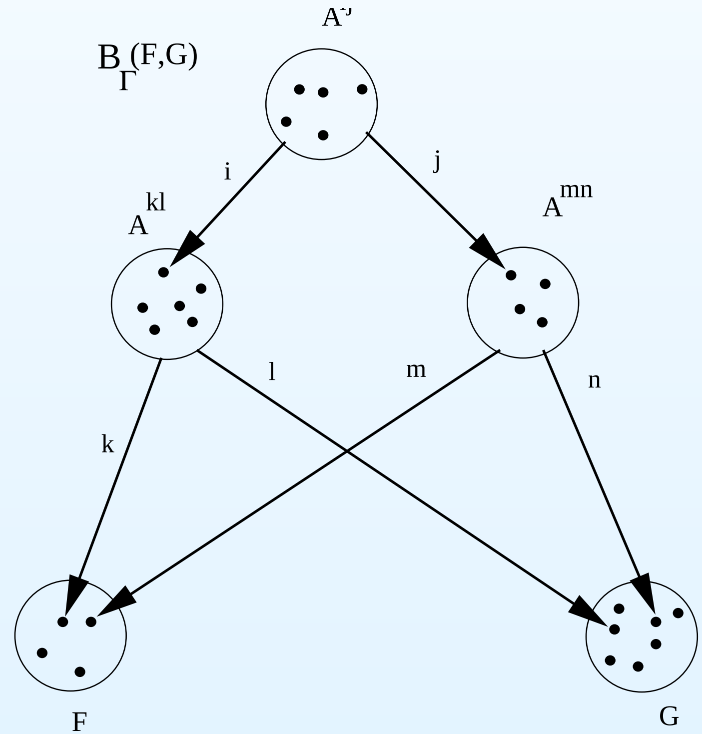
donde

- $I : E_\Gamma \to [m]$ y $b : x \to V_\Gamma$ son aplicaciones arbitrarias.
- $A_{\Gamma,I,b} = \prod_{v \in V_\Gamma} A^{I(e_v^1)I(e_v^2)}(b^{-1}(v) \sqcup E_v, f|_{b^{-1}(v)} \sqcup I|_{E_v})$.
- $B_{\Gamma,I,b} = F(b^{-1}(\overline{1}) \sqcup E_{\overline{1}}, f|_{b^{-1}(\overline{1})} \sqcup I_{E_{\overline{1}}}) \times G(b^{-1}(\overline{2}) \sqcup E_{\overline{2}}, f|_{b^{-1}(\overline{2})} \sqcup I_{E_{\overline{2}}})$.

Esta formula no es realmente clara!!!

Sin embargo el producto admite una representacion grafica bien sencilla:





Categorificacion del espacio cuantico de fases

El espacio cuantico de fases es la cuantizacion por deformacion de la variedad simplectica $(\mathbb{R}^{2n}, \{\ ,\ \})$ con el corchete canonico

$$\{x_i, x_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$$

para $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ coordenadas sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

El anillo de funciones sobre el espacio cuantico de fases es isomorfo al algebra de Weyl W_n, tambien conocida como el algebra de los operadores de aniquilacion y creacion:

$$W_n = R\langle\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\rangle\rangle[[\hbar]]/I_W$$

donde I_W es el ideal generado por

$$[y_i, x_j] = \delta_{ij}\hbar \;\; [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0.$$

En este caso el producto cuantico a nivel funtorial esta dado por:

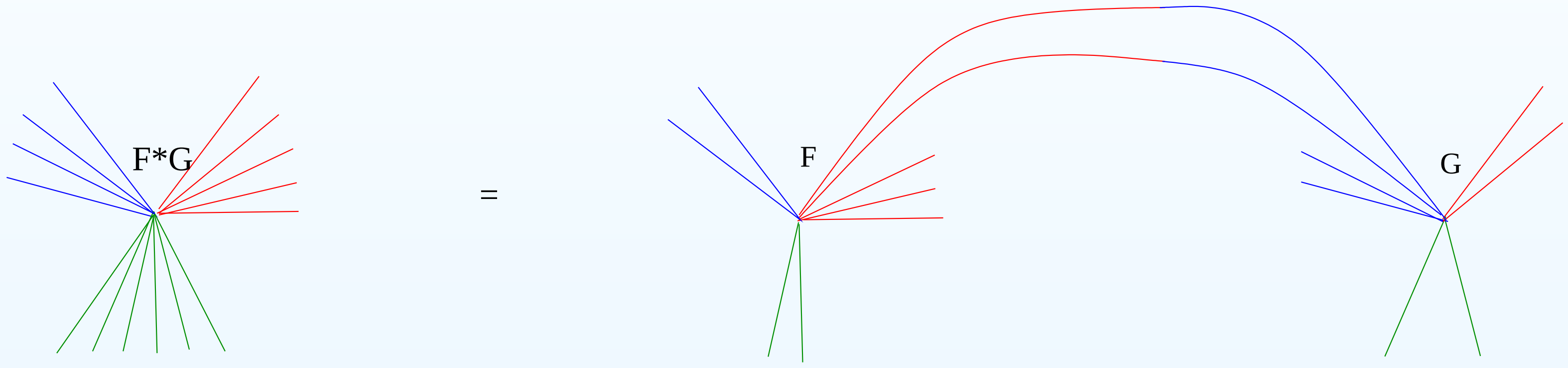
$$F{\star}G(x,f,h) = \bigoplus F(x_1{\sqcup}h_3, f|_{x_1}{\sqcup}\{2\}{\times}g, h_1){\otimes}G(x_2{\sqcup}h_3, f|_{x_2}{\sqcup}\{1\}{\times}g, h_2)$$

where the sum runs over

$$x_1 \sqcup x_2 = x, \quad h_1 \sqcup h_2 \sqcup h_3 = h \quad g : h_3 \longrightarrow [n]$$

.

En terminos de grafos el producto cuantico de funtores esta dado por:

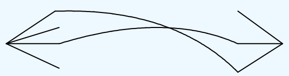


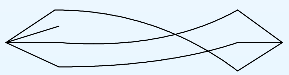
Consideramos el producto $Y^4 \star X^3$.

Los grafos que surgen en este caso son :

0 edges  x^3y^4

1 edge  $12xy^3\hbar$

2 edges  $36xy^2\hbar^2$

3 edges  $24y\hbar^3$

Vemos que:

$$y^4 \star x^3 = |Y^4 \star X^3| = x^3y^4 + 12xy^3\hbar + 36xy^2\hbar^2 + 24y\hbar^3$$

¡GRACIAS!