El número de Jacobi y su relación con sistemas de ecuaciones diferenciales algebraicas.

L. D'Alfonso, G. Jeronimo, G. Massaccesi, P. Solernó

Universidad de Buenos Aires

DAE

= sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales ordinarias e implícitas.

DAE

$=$ sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales ordinarias e implícitas.

- Decidir si un DAE tiene solución o transformarlo a uno "más simple".

DAE
= sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales ordinarias e implícitas.

- Decidir si un DAE tiene solución o transformarlo a uno "más simple".
- Estimar cuántas condiciones iniciales pueden ser fijadas arbitrariamente en un DAE.

DAE

= sistema de ecuaciones diferenciales polinomiales ordinarias e implícitas.

- Decidir si un DAE tiene solución o transformarlo a uno "más simple".
- Estimar cuántas condiciones iniciales pueden ser fijadas arbitrariamente en un DAE.
- Dificultad algebraica: Anillos no noetherianos.

Sistemas DAE a considerar

$$(\Sigma) := \begin{cases} f_1(X_1^{[e_{11}]}, \dots, X_n^{[e_{1n}]}) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(X_1^{[e_{n1}]}, \dots, X_n^{[e_{rn}]}) & = & 0 \end{cases}$$

- $X_1, \dots, X_n \, (= X)$ las incógnitas;
- $X_j^{(i)}$ la derivada $i-$ésima de X_j y $X_j^{[i]} := X_j, \dot{X}_j, \dots, X_j^{(i)}$
- $K = \mathbb{Q}(t)$, $K\{X\} := K[X^{(i)} : i \geq 0]$.
- $f_i \in K\{X\}$ y $e_{ij} :=$ orden de f_i en la variable X_j.
- $e := \max\{1, e_{ij}; 1 \leq i, j \leq n\}$.

Hipótesis del sistema

Hipótesis del sistema

- $\Delta := [f_1, \ldots, f_n]$, el ideal (diferencial) asociado a $(\Sigma) =$ menor ideal de $K\{X\}$ que contiene a las derivadas de cualquier orden de $f_1, \ldots, f_n$ es primo.

Hipótesis del sistema

- $\Delta := [f_1, \ldots, f_n]$, el ideal (diferencial) asociado a (Σ) = menor ideal de $K\{X\}$ que contiene a las derivadas de cualquier orden de $f_1, \ldots, f_n$ es primo.
- (Σ) es quasi-regular: para cada $i \in \mathbb{N}_0$, la matriz jacobiana de los polinomios $f_1^{[i]}, \ldots, f_n^{[i]}$ respecto de todas sus variables tiene rango máximo $n(i+1)$ módulo el ideal Δ.

Hipótesis del sistema

- $\Delta := [f_1, \ldots, f_n]$, el ideal (diferencial) asociado a (Σ) = menor ideal de $K\{X\}$ que contiene a las derivadas de cualquier orden de $f_1, \ldots, f_n$ es primo.
- (Σ) es quasi-regular: para cada $i \in \mathbb{N}_0$, la matriz jacobiana de los polinomios $f_1^{[i]}, \ldots, f_n^{[i]}$ respecto de todas sus variables tiene rango máximo $n(i+1)$ módulo el ideal Δ.

(⇒) el ideal $(f_1^{[i]}, \ldots, f_n^{[i]}) \subset K[X^{[i+e]}]$ es primo.

Índice de diferenciación

Índice de diferenciación

- Cantidad mínima de derivadas de las ecuaciones de (Σ) necesarias para obtener todas las relaciones de un orden prefijado que deben cumplir sus soluciones.

Índice de diferenciación

- Cantidad mínima de derivadas de las ecuaciones de (Σ) necesarias para obtener todas las relaciones de un orden prefijado que deben cumplir sus soluciones.
  Ejemplo:

$$(\Sigma) = \left\{ \begin{array}{ccc} g_1(t, X_1, X_2) - \dot{X}_1 & = & 0 \\ g_2(t, X_1, X_2) & = & 0 \end{array} \right.$$

Índice de diferenciación

- Cantidad mínima de derivadas de las ecuaciones de (Σ) necesarias para obtener todas las relaciones de un orden prefijado que deben cumplir sus soluciones.
  Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} g_1(t, X_1, X_2) - \dot{X}_1 & = & 0 \\ g_2(t, X_1, X_2) & = & 0 \end{cases}$$

si $\frac{\partial g_2}{\partial X_2} \neq 0 \Rightarrow$

Índice de diferenciación

- Cantidad mínima de derivadas de las ecuaciones de (Σ) necesarias para obtener todas las relaciones de un orden prefijado que deben cumplir sus soluciones.
  Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} g_1(t, X_1, X_2) - \dot{X}_1 & = & 0 \\ g_2(t, X_1, X_2) & = & 0 \end{cases}$$

si $\frac{\partial g_2}{\partial X_2} \neq 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial X_1}\dot{X}_1 + \frac{\partial g_2}{\partial X_2}\dot{X}_2$

Índice de diferenciación

- Cantidad mínima de derivadas de las ecuaciones de (Σ) necesarias para obtener todas las relaciones de un orden prefijado que deben cumplir sus soluciones.
  Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} g_1(t, X_1, X_2) - \dot{X}_1 & = & 0 \\ g_2(t, X_1, X_2) & = & 0 \end{cases}$$

si $\frac{\partial g_2}{\partial X_2} \neq 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial X_1}\dot{X}_1 + \frac{\partial g_2}{\partial X_2}\dot{X}_2 \quad \Rightarrow$ índice$=1$.

- Cantidad mínima de derivadas para "despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

- Cantidad mínima de derivadas para “despejar” $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} f_1(X, \dot{X}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(X, \dot{X}) & = & 0 \end{cases}$$

- Cantidad mínima de derivadas para "despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} f_1(X, \dot{X}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(X, \dot{X}) & = & 0 \end{cases}$$

y la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_l}{\partial \dot{X}_k}\right)_{l,k}$ es inversible,

- Cantidad mínima de derivadas para "despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} f_1(X, \dot{X}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(X, \dot{X}) & = & 0 \end{cases}$$

y la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_l}{\partial \dot{X}_k}\right)_{l,k}$ es inversible, TFI $\Rightarrow$ índice$=0$.

- Cantidad mínima de derivadas para "despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.
  Ejemplo:

$$(\Sigma) = \begin{cases} f_1(X, \dot{X}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(X, \dot{X}) & = & 0 \end{cases}$$

  y la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_l}{\partial \dot{X}_k}\right)_{l,k}$ es inversible, TFI $\Rightarrow$ índice$=0$.
- Cantidad mínima de derivadas necesarias para asegurar existencia y unicidad de las soluciones.

- Cantidad mínima de derivadas para "despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.
  Ejemplo:
  $$(\Sigma) = \begin{cases} f_1(X, \dot{X}) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(X, \dot{X}) & = & 0 \end{cases}$$
  y la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial f_l}{\partial \dot{X}_k}\right)_{l,k}$ es inversible, TFI $\Rightarrow$ índice$=0$.
- Cantidad mínima de derivadas necesarias para asegurar existencia y unicidad de las soluciones.

Interés:

- Medida de la dificultad de la resolución numérica.
- Inicialización consistente del sistema.

Ejemplo: (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

Ejemplo: (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \;:=\; \left\{ \begin{array}{ccc} \dot{X}_1 - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

Ejemplo: (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \quad := \left\{ \begin{array}{cccc} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

con $\left(\frac{\partial g_4}{\partial X_3}\right) \cdot \left(\frac{\partial g_3}{\partial X_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial g_2}{\partial X_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial X_4}\right) \neq 0$ y $[\dot{X}_1 - g_1, \dot{X}_2 - g_2, \dot{X}_3 - g_3, g_4]$ primo.

Ejemplo: (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \;:=\; \begin{cases} \dot{X}_1 & - \quad g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - \quad g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - \quad g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & \quad g_4(t, X_3) & = 0) \end{cases} .$$

con $\left(\frac{\partial g_4}{\partial X_3}\right) \cdot \left(\frac{\partial g_3}{\partial X_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial g_2}{\partial X_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial X_4}\right) \neq 0$ y $[\dot{X}_1 - g_1, \dot{X}_2 - g_2, \dot{X}_3 - g_3, g_4]$ primo.

índice=4

Distintas nociones de índice:

Distintas nociones de índice:

- Rabier-Rheinboldt (1994), Campbell-Gear (1995), Fliess-Lévine-Martin-Rouchon (1995)
- Brenan-Campbell-Petzold (1996), Kunkel-Mehrmann (2006)
- Pantelides (1988), Reid-Lin-Wittkopf (2001), Thomas (1996), Lamour (2005), Pritchard-Sit (2007).

Posible definición de índice de diferenciación

Objetivo: "Despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

Posible definición de índice de diferenciación

Objetivo: "Despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

"Despejar": Queremos fijar $\mathcal{B} \subseteq \{X^{[e-1]}\}$ una base de trascendencia de $\mathrm{Frac}(K[X^{[e-1]}]/\Delta \cap K[X^{[e-1]}])$ sobre K y encontrar

Posible definición de índice de diferenciación

Objetivo: "Despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

"Despejar": Queremos fijar $\mathcal{B} \subseteq \{X^{[e-1]}\}$ una base de trascendencia de $\mathrm{Frac}(K[X^{[e-1]}]/\Delta \cap K[X^{[e-1]}])$ sobre K y encontrar para cada $i = 1, \ldots, n$ un polinomio P_i tal que $P_i(\mathcal{B}, X_i^{(e)}) \in \Delta \cap K[X^{[e]}]$

Posible definición de índice de diferenciación

Objetivo: "Despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

"Despejar": Queremos fijar $\mathcal{B} \subseteq \{X^{[e-1]}\}$ una base de trascendencia de $\mathrm{Frac}(K[X^{[e-1]}]/\Delta \cap K[X^{[e-1]}])$ sobre K y encontrar para cada $i = 1, \ldots, n$ un polinomio P_i tal que $P_i(\mathcal{B}, X_i^{(e)}) \in \Delta \cap K[X^{[e]}]$

¿Dónde buscamos los polinomios P_i?

Posible definición de índice de diferenciación

Objetivo: "Despejar" $X^{(e)}$ en términos de $X^{[e-1]}$.

"Despejar": Queremos fijar $\mathcal{B} \subseteq \{X^{[e-1]}\}$ una base de trascendencia de $\mathrm{Frac}(K[X^{[e-1]}]/\Delta \cap K[X^{[e-1]}])$ sobre K y encontrar para cada $i = 1, \ldots, n$ un polinomio P_i tal que $P_i(\mathcal{B}, X_i^{(e)}) \in \Delta \cap K[X^{[e]}]$

¿Dónde buscamos los polinomios P_i?
¿Qué es $\Delta \cap K[X^{[e]}]$?

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = ?$$

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

  $\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}]$

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = ?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \ldots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \\ = \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots =$$

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \ldots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] =$$
$$= \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots = \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}]$$

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \ldots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] =$$
$$= \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots = \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}]$$

$$\sigma := \min\{h \in \mathbb{N}_0 : \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}]\}.$$

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = ?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \ldots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \\ = \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots = \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}]$$

$$\sigma := \min\{h \in \mathbb{N}_0 : \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}]\}.$$

Resultado: σ existe y no depende de ℓ

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \ldots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] =$$
$$= \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots = \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}]$$

$$\sigma := \min\{h \in \mathbb{N}_0 : \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}]\}.$$

Resultado: σ existe y no depende de ℓ

σ :=índice de diferenciación

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \dots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \dots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \\ = \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots = \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}]$$

$$\sigma := \min\{h \in \mathbb{N}_0 : \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}]\}.$$

Resultado: σ existe y no depende de ℓ

$\sigma :=$índice de diferenciación

Los polinomios $P_i \in (f_1^{[\sigma]}, \dots, f_n^{[\sigma]}) \cap K[X^{[e]}]$

$$\Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] =?$$

- $\Delta_\ell := (f_1^{[\ell-1]}, \ldots, f_n^{[\ell-1]})$ ideal (primo) de $K[X^{[e+\ell]}]$.

$$\Delta_\ell \subset \Delta_{\ell+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] \subset \ldots \subset \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}] =$$
$$= \Delta_{\ell+h+1} \cap K[X^{[e+\ell]}] = \cdots = \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}]$$

$$\sigma := \min\{h \in \mathbb{N}_0 : \Delta \cap K[X^{[e+\ell]}] = \Delta_{\ell+h} \cap K[X^{[e+\ell]}]\}.$$

Resultado: σ existe y no depende de ℓ

σ :=índice de diferenciación

Los polinomios $P_i \in (f_1^{[\sigma]}, \ldots, f_n^{[\sigma]}) \cap K[X^{[e]}]$

Objetivo: Cota superior para el índice en función de los parámetros del sistema (orden, cantidad de incógnitas y de ecuaciones, etc.)

El número de Jacobi

El número de Jacobi

Parámetro introducido por Jacobi (1836) en el análisis de sistemas diferenciales.

El número de Jacobi

Parámetro introducido por Jacobi (1836) en el análisis de sistemas diferenciales.

Para $A \in \mathbb{N}_0^{n \times n}$, el número de Jacobi de A:

El número de Jacobi

Parámetro introducido por Jacobi (1836) en el análisis de sistemas diferenciales.

Para $A \in \mathbb{N}_0^{n\times n}$, el número de Jacobi de A:

$$J(A) := \max_{\tau \in S_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)} \right\}.$$

El número de Jacobi

Parámetro introducido por Jacobi (1836) en el análisis de sistemas diferenciales.

Para $A \in \mathbb{N}_0^{n\times n}$, el número de Jacobi de A:

$$J(A) := \max_{\tau \in S_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)} \right\}.$$

Elige un elemento por fila sin repetir columna y suma.

El número de Jacobi

Parámetro introducido por Jacobi (1836) en el análisis de sistemas diferenciales.

Para $A \in \mathbb{N}_0^{n\times n}$, el número de Jacobi de A:

$$J(A) := \max_{\tau \in S_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)} \right\}.$$

Elige un elemento por fila sin repetir columna y suma.

Ejemplo. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$J(A) = 2 + 2 + 1 = 5.$$

Para (Σ) definido por polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$ se define el número de Jacobi de (Σ):

Para (Σ) definido por polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$ se define el número de Jacobi de (Σ):

$$J(\mathcal{E}) \text{ donde } \mathcal{E} := (e_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

$$\text{con} \quad e_{ij} := \begin{cases} \mathrm{ord}_{X_j}(f_i) & \text{si } X_j \text{ aparece en } f_i \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Para (Σ) definido por polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$ se define el número de Jacobi de (Σ):

$$J(\mathcal{E}) \text{ donde } \mathcal{E} := (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$\text{con} \quad e_{ij} := \begin{cases} \mathrm{ord}_{X_j}(f_i) & \text{si } X_j \text{ aparece en } f_i \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

(Jacobi, 1836) Conjetura:

$$\sharp\mathcal{B} := \mathrm{ord}(\Delta) \leq J(\mathcal{E})$$

Resultados anteriores sobre cotas

Resultados anteriores sobre cotas

- La conjetura de Jacobi fue probada bajo ciertas hipótesis:
  - (Ritt, 1935) sistemas lineales,
  - (Lando, 1970) sistemas de primer orden,
  - (Kondratieva-Mihalev-Pankratiev, 1982) sistemas quasi-regulares.

Resultados anteriores sobre cotas

- La conjetura de Jacobi fue probada bajo ciertas hipótesis:
  - (Ritt, 1935) sistemas lineales,
  - (Lando, 1970) sistemas de primer orden,
  - (Kondratieva-Mihalev-Pankratiev, 1982) sistemas quasi-regulares.

  (Ollivier-Sadik, 2006) extienden el resultado a sistemas quasi-regulares de dimensión positiva.

Resultados anteriores sobre cotas

- La conjetura de Jacobi fue probada bajo ciertas hipótesis:
  - (Ritt, 1935) sistemas lineales,
  - (Lando, 1970) sistemas de primer orden,
  - (Kondratieva-Mihalev-Pankratiev, 1982) sistemas quasi-regulares.

  (Ollivier-Sadik, 2006) extienden el resultado a sistemas quasi-regulares de dimensión positiva.
- (Ritt, 1950) Cota para $\mathrm{ord}(\Delta)$ en función de los órdenes de las variables en las ecuaciones en el caso 0-dimensional.

Cota superior para el índice de diferenciación

Cota superior para el índice de diferenciación

Resultados. Sea (Σ) un sistema quasi-regular definido por polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$ que generan un ideal diferencial primo Δ. Entonces,

Cota superior para el índice de diferenciación

Resultados. Sea (Σ) un sistema quasi-regular definido por polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$ que generan un ideal diferencial primo Δ. Entonces,

- $\sigma + \mathrm{ord}(\Delta) \leq J(\mathcal{E}) + \max\{e_{ij}\} - \min\{e_{ij}\}$.

Cota superior para el índice de diferenciación

Resultados. Sea (Σ) un sistema quasi-regular definido por polinomios $f_1, \ldots, f_n \in K\{X_1, \ldots, X_n\}$ que generan un ideal diferencial primo Δ. Entonces,

- $\sigma + \mathrm{ord}(\Delta) \leq J(\mathcal{E}) + \max\{e_{ij}\} - \min\{e_{ij}\}$.
- $\mathrm{ord}(\Delta) \leq J(\mathcal{E})$

Ejemplo (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \;\; := \left\{ \begin{array}{ccccc} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

Ejemplo (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \;:=\; \left\{ \begin{array}{cclc} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

con condiciones.

Ejemplo (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \;:=\; \left\{ \begin{array}{cccl} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

con condiciones.

$$\sigma = 4$$

Ejemplo (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \ := \left\{ \begin{array}{cccc} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

con condiciones.

$$\sigma = 4 \qquad \mathrm{ord}(\Delta) = 0$$

Ejemplo (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \ := \left\{ \begin{array}{cccl} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{array} \right. .$$

con condiciones.

$$\sigma = 4 \qquad \mathrm{ord}(\Delta) = 0$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Sistema de Hessenberg) $n = 4$

$$(\Sigma) \; := \begin{cases} \dot{X}_1 & - & g_1(t, X_1, X_2, X_3, X_4) & = 0 \\ \dot{X}_2 & - & g_2(t, X_1, X_2, X_3) & = 0 \\ \dot{X}_3 & - & g_3(t, X_2, X_3) & = 0 \\ & & g_4(t, X_3) & = 0) \end{cases} .$$

con condiciones.

$$\sigma = 4 \qquad \mathrm{ord}(\Delta) = 0$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma + \mathrm{ord}(\Delta) \leq \mathrm{J}(\mathcal{E}) + \max\{\epsilon_{\mathrm{ij}}\} - \min\{\epsilon_{\mathrm{ij}}\} = 3 + 1 - 0 = 4.$$

Un ejemplo clásico: el péndulo

Un ejemplo clásico: el péndulo

$$(\Sigma) = \left\{ \begin{array}{ccc} X_1^{(2)} + X_1 X_3 & = & 0 \\ X_2^{(2)} + X_2 X_3 + g & = & 0 \\ X_1^2 + X_2^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right. , \qquad e = 2.$$

donde g es la constante de la gravedad.

Un ejemplo clásico: el péndulo

$$(\Sigma) = \begin{cases} X_1^{(2)} + X_1 X_3 & = & 0 \\ X_2^{(2)} + X_2 X_3 + g & = & 0 \\ X_1^2 + X_2^2 - 1 & = & 0 \end{cases}, \qquad e = 2.$$

donde g es la constante de la gravedad.

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J(\mathcal{E}) = 4.$$

Un ejemplo clásico: el péndulo

$$(\Sigma) = \begin{cases} X_1^{(2)} + X_1X_3 & = & 0 \\ X_2^{(2)} + X_2X_3 + g & = & 0 \\ X_1^2 + X_2^2 - 1 & = & 0 \end{cases}, \qquad e = 2.$$

donde g es la constante de la gravedad.

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J(\mathcal{E}) = 4.$$

$$\sigma = 4$$

Un ejemplo clásico: el péndulo

$$(\Sigma) = \begin{cases} X_1^{(2)} + X_1X_3 & = & 0 \\ X_2^{(2)} + X_2X_3 + g & = & 0 \\ X_1^2 + X_2^2 - 1 & = & 0 \end{cases}, \qquad e = 2.$$

donde g es la constante de la gravedad.

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J(\mathcal{E}) = 4.$$

$$\sigma = 4 \qquad \operatorname{ord}(\Delta) = 2$$

Un ejemplo clásico: el péndulo

$$(\Sigma) = \begin{cases} X_1^{(2)} + X_1 X_3 & = & 0 \\ X_2^{(2)} + X_2 X_3 + g & = & 0 \\ X_1^2 + X_2^2 - 1 & = & 0 \end{cases}, \qquad e = 2.$$

donde g es la constante de la gravedad.

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J(\mathcal{E}) = 4.$$

$$\sigma = 4 \qquad \mathrm{ord}(\Delta) = 2$$

$$J(\mathcal{E}) + \max\{e_{ij}\} - \min\{e_{ij}\} = 4 + 2 - 0 = 6 =$$

Un ejemplo clásico: el péndulo

$$(\Sigma) = \begin{cases} X_1^{(2)} + X_1 X_3 & = & 0 \\ X_2^{(2)} + X_2 X_3 + g & = & 0 \\ X_1^2 + X_2^2 - 1 & = & 0 \end{cases}, \qquad e = 2.$$

donde g es la constante de la gravedad.

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J(\mathcal{E}) = 4.$$

$$\sigma = 4 \qquad \mathrm{ord}(\Delta) = 2$$

$$J(\mathcal{E}) + \max\{e_{ij}\} - \min\{e_{ij}\} = 4 + 2 - 0 = 6 = \mathrm{ord}(\Delta) + \sigma$$

Cota fuerte de Jacobi para el orden

$$e_{ij} = -\infty \text{ si } X_j \text{ no aparece en } f_i$$

Cota **fuerte** de Jacobi para el orden

$$e_{ij} = -\infty \text{ si } X_j \text{ no aparece en } f_i$$

En el péndulo,

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty \end{pmatrix}$$

Cota **fuerte** de Jacobi para el orden

$$e_{ij} = -\infty \text{ si } X_j \text{ no aparece en } f_i$$

En el péndulo,

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ord}(\Delta) = 2 = J(\mathcal{E})$$