Sobre dimensiones de Modelos de Gel'fand

Un modelo de Gel´fand para un grupo finito G, es una representación ρ ordinaria del grupo cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de G.

Modelos de Gel'fand

Bernstein, Gelfand, Gelfand. 1981
Para grupos de Lie compactos

Klyachko. 1984
Para $Gl_n(F_q)$

Pantoja, Soto-Andrade.1986
Para un grupo de Movimientos rígidos

Inglis,Saxl. 1991
Para el grupo Simétrico

Baddeley. 1991
Modelos por involuciones para grupos de Weyl de tipos A y B.

Howlett, Zworestine. 2000
Para $Gl_n(F_q)$

Kodiyalam, Verma. 2006
Para el grupo simétrico

Adin, Postnikov, Roichman. 2008
Para el grupo simétrico y su álgebra de Iwahori-Hecke
Para el grupo simétrico generalizado
Polinomios G-armónicos
S el álgebra simétrica de C^n

$$\mathcal{H} = \left\{ Q \in S : \partial_P(Q) = 0, \ \forall P \in S_+^G \right\}$$

Polinomios G-muyarmónicos
W el álgebra de Weyl

$$\mathcal{N} = \left\{ Q \in S : \mathcal{D}(Q) = 0, \ \forall \mathcal{D} \in W_+^G \right\}$$

Grupos de reflexiones
$\mathcal{H}$ es G-módulo isomorfo al álgebra de grupo de G

Modelos de Gel'fand
$\mathcal{N}$ contiene un modelo de Gel'fand para G

$\mathcal{N}$ es un modelo de Gel'fand si G es grupo de reflexiones de los tipos: diedrales, de tipos A_n, B_n, D_n (n impar), $G(m,1,n)$ (Simétrico generalizado)

Si todas las representaciones de G se pueden realizar sobre los números reales, entonces:

$$gr(\rho) = \text{n}^o \text{ involuciones en } G$$

Este es el caso de los grupos de Weyl y grupos de Coxeter.

En particular $G(2,2,n)$

La construcción de Kodiyalam y Verma puede extenderse al caso del grupo simétrico generalizado, dando como consecuencia la siguiente expresión para la dimensión del modelo de Gel'fand $\mathcal{N}$:

$$\dim(\mathcal{N}) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k} \times \mathcal{I}_k = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k} \frac{n!}{2^k k!\,(n-2k)!}$$

$$\mathcal{I}_k = \text{n}^o \text{ de involuciones en } \mathfrak{S}_n \text{ de longitud } k$$

Para $G(m,m,n)$, con $(m,n)=1$, encontramos que:

$$\dim(\mathcal{N}) = \sum_{\lambda \dashv n} [\mathfrak{S} : \mathfrak{S}_\lambda] \times I_\lambda \times O_\lambda = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k-1} \times \mathcal{I}_k$$

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_m}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\lambda &= \text{n}^o \text{ de involuciones de } \mathfrak{S}_\lambda \\
\mathcal{I}_k &= \text{n}^o \text{ de involuciones en } \mathfrak{S}_n \text{ de longitud } k \\
O_\lambda &= \text{n}^o \text{de órbitas de } \mathfrak{S}_n \text{ en } \mathbb{Z}_m^n \text{ con isotropía } \mathfrak{S}_\lambda
\end{aligned}
$$

En ambos casos, la dimensión del modelo coincide con el número de elementos en G que son porductos de reflexiones en $G(m,1,n)$ que conmutan dos a dos.

Referencias:

[1] Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y., *A Gelfand model for Wreath Products*, arXiv:math.RT/08022824 v1, 2008.

[2] Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y, *Comobinatorial Gelfand Models*, arXiv:math.RT/07093962 v2, 2008

[3] Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *A Gelfand model for the symmetric group*, Communications in Algebra, **29** (4), 1841 - 1851 (2001).

[4] Araujo, J.O., *A Gelfand model for aWeyl group of type Bn*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **44**, no. 2 (2003) 359-373.

[5] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gel.fand Model for the Weyl group of type* D_n *and the branching rules* $D_n \hookrightarrow B_n$. Journal in Algebra, vol. 294, (2005), 97-116.

[6] Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gel.fand Model for the Symmetric Generalized Group*, por aparecer en Communications in Algebra.

[7] Baddeley, R., *Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups*. Journal of London Mathematical Society no. **44**, serie 2 (1991) 55-74.

[8] Bernstein, I, Gelfand, I. and Gelfand, S. *Models of representations of Lie groups*, Selected. Math. Soviet **1** (2) (1981) 121-142.

[9] Howlett, R. and Zworestine, C., *On Klyachkos model for the representations of finite linear groups*. China Higher Education Press (Beijing), and Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg), (2000), 229-246.

[10] Inglis, N. F. J. and Saxl, J., *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*, Archiv der Mathematik **57** (1991), 424-431.

[11] Klyachko, A. A., *Models for the complex representations of the groups* $GL(n, q)$, Math. USSR Sbornik **48** (1984), 365379.

[12] Kodiyalam, V. and Verma, D.N., *A natural representation model for symmetric groups*. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.

[13] Pantoja, J. and Soto-Andrade, J., *Fonctions sphériques et modèles de Gel.fand pour le groupe de mouvements rigides d.un espace paraeuclidien sur un corps local.* Comptes Rendus de L.Académie des Sciences **302**, (1986), 463-466.