Alternativas para la convergencia de composición y molificación de núcleos de Markov diádicos y difusiones fraccionarias diádicas.

Federico Morana
IMAL-UNL-CONICET, Argentina
fmorana@santafe-conicet.gov.ar

La solución del problema de valor inicial para la ecuación de difusión asociada a un operador de diferenciación fraccionaria diádico en $\mathbb{R}^+$ puede expresarse a través de un operador integral aplicado al dato inicial, con un núcleo que sustituye al de Weierstrass-Gauss del caso clásico. Para un orden de diferenciación fraccionaria s, $(0 < s < 1)$, el núcleo del operador integral solución es el "núcleo del calor fraccionario diádico de orden s" en $\mathbb{R}^+$, que para cada tiempo $t > 0$ es una función de dos variables (definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$) no negativa, que depende de la distancia diádica y es s-estable, con parámetro de estabilidad que depende continuamente del tiempo t (ver [AA]).

Nosotros probamos que, para el caso $s \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, estos núcleos son atractores de procesos de composición iterada y molificación diádica aplicados a núcleos de Markov diádicos s-estables (la composición de dos núcleos se define en este contexto como el núcleo del operador integral que resulta de la composición de los operadores integrales asociados a los primeros núcleos). Este resultado es análogo a los teoremas del límite central clásicos. La convergencia se alcanza en el sentido de L^p para los operadores integrales asociados. La herramienta fundamental es el análisis espectral de Fourier por medio de las wavelets de Haar.

También, hallamos que existen (además de la mencionada) sólo otras dos alternativas de convergencia espectral de la sucesión de operadores obtenidos a través de tales procesos, de acuerdo a las propiedades de estabilidad de los núcleos iniciales. Una de dichas alternativas constituye una aproximación a la identidad en sentido puntual y de la norma de L^p sobre los espacios L^p, para $1 \leqslant p < \infty$. La otra resulta en la dispersión de la masa por el infinito (en este caso el límite es el operador nulo).

Los resultados principales se resumen en el teorema enunciado a continuación. Una versión de los mismos se desarrolla en [AGM].

<u>Teorema:</u>

Sea $s = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $0 < s < 1$ y K un núcleo de Markov diádico. La sucesión de operadores integrales de núcleos $\{K^i : i \in \mathbb{N}\}$ definidos por la molificación con factor 2^{ni} de la convolución iterada 2^{mi} veces del núcleo K en cada paso i, tiene las siguientes alternativas de convergencia:

(A) si K es s-estable con parámetro de estabilidad ct, $\{K^i\}$ converge en L^p $(1 < p < \infty)$ al núcleo del calor fraccionario diádico de orden s a tiempo t, para una constante $c > 0$ adecuada;

(B) si K es sub s-estable entonces $\{K^i\}$ constituye una aproximación a la identidad en sentido puntual y de L^p para funciones en L^p $(1 \leqslant p < \infty)$;

(C) si K es super s-estable $\{K^i\}$ converge a cero.

Extensiones de estos resultados se obtienen en espacios homogéneos y de tipo homogéneo, donde también los problemas de difusión asociados a diferenciaciones fraccionarias diádicas han sido considerados recientemente en [AA].

Bibliografía:

[AA] Marcelo Actis y Hugo Aimar, *Dyadic nonlocal diffusions in metric measure spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. 18 (2015), no. 3, 762-788. MR 3351499.

[AGM] Hugo Aimar, Ivana Gómez y Federico Morana, *The diadic fractional diffusion kernel as a central limit.* Preprint IMAL: http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints/2017-0038.pdf. En arXiv: https://arxiv.org/abs/1702.02866.

Joint work with Hugo Aimar (IMAL-CONICET-UNL) and Ivana Gómez (IMAL-CONICET-UNL).