# Matemática I (B)

## Práctica 6 — Extremos de funciones en varias variables

**1.** Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones, y para cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

*a*) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

*b*) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

*c*) $f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$

*d*) $f(x,y) = (x+1)^2 - y^2$

*e*) $f(x,y) = xy + 2x - 3y + 3$

*f*) $f(x,y) = -x^3 - y^3 + 3xy$

**2.** Sea $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$.

*a*) Muestre que $(0,0)$ es punto crítico de $f$ y calcule el Hessiano en dicho punto.

*b*) Muestre que $f$ tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $\sigma(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de $a, b$.

*c*) Muestre que $f$ tiene un máximo relativo en $(0,0)$ sobre la curva $\sigma(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^2\right)$, es decir, $f \circ \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en 0. Deduzca que el origen es punto silla de $f$.

**3.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

*a*) Verifique $(0,0)$ es un punto crítico de $f$ pero que la función no tiene un extremo relativo en dicho punto.

*b*) Calcule todos los extremos relativos de $f$, y clasifíquelos.

*c*) Verifique gráficamente lo obtenido.

**4.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0,1) = 0, \quad \nabla f(0,1) = (0,2) \quad \text{y} \quad Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$.

*a*) Calcule $\nabla g(0,1)$ y $Hg(0,1)$

*b*) ¿Tiene $g$ un extremo relativo en $(0,1)$?

**5.** Decida si existen o no números reales $a$ tales que la función

$$f(x,y) = e^{4y-x^2} + a(x-y) + 9(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

**6.** Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones, y para cada uno de ellos, analice si la función tiene un máximo local, un mínimo local, o un punto de ensilladura.

*a*) $f(x,y,z) = xy + z^2$ *b*) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + z$

**7.** Determine los extremos relativos de $f$ restringida a $A$ en los siguientes casos:

*a*) $f(x,y) = x\cos(y),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$

*b*) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x,\ \ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < x < 3,\ -3 < y < 3\}$

*c*) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

*d*) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

**8.** Hallar (si es que existen) los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones $f(x,y)$ restringidas al conjunto $A$

*a*) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$, donde $A$ es el borde del triángulo de vértices $(2,0)$, $(0,2)$ y $(0,-2)$.

*b*) $f(x,y) = xy^2$, donde $A$ es el borde del conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$

**9.** Encuentre el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima.

**10.** Considere la función $f(x,y) = 2x + y$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 3\}.$$

*a*) Grafique el conjunto $A$ junto con las curvas de nivel $f(x,y) = c$, para algunos valores de $c$.

*b*) Halle los extremos relativos de $f$ restringida al conjunto $A$. ¿Tiene $f$ máximos y/o mínimos absolutos?

*c*) Repita el análisis para el conjunto

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 3,\ x > 0\}.$$

**11.** Considere la función $f(x,y) = x^3y$.

*a*) Busque los puntos $(x,y)$ del primer cuadrante donde es máxima y mínima la función $f$, sujeta a la restricción $2x + 3y = 6$.

*b*) Busque los puntos $(x,y)$ donde es máxima y mínima la función $f$, sujeta a la restricción $3x^2 + y^2 = 1$.

*c*) Busque los puntos $(x,y)$ del primer cuadrante donde es máxima y mínima la función $f$, sujeta a la restricción $3x^2 + y^2 = 1$.

*Nota:* el primer cuadrante incluye los semiejes $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

En todos los casos dibuje en el plano la restricción y algunas curvas de nivel de $f$, entre ellas la curva de nivel que es tangente a la restricción.

**12.** Determine los extremos absolutos de $f$ restringida a $A$ en los siguientes casos:

*a)* $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy), \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$

*b)* $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 9\}$

*c)* $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

*d)* $f(x,y,z) = x^2 - y^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

*e)* $f(x,y,z) = x - y + z, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$

*f)* $f(x,y,z) = xyz, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

*g)* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2y^2z = 1\}$

**13.** Encuentre los puntos de las siguientes superficies más cercanos al origen.

*a)* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

*b)* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 7\}$

**14.** La temperatura de una placa en un punto cualquiera $(x,y)$ viene dada por la función $T(x,y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

**15.** Considere una especie de mariposa que a lo sumo pone huevos dos veces en su vida, y que en cada ocasión pone 3 huevos. La aptitud de cada huevo depende de su tamaño $t$, y está dada por $h(t) = \frac{2t}{5+t}$.

Se asume que los huevos de cada nidada tienen todos el mismo tamaño, y se nota con $x$ al tamaño de cada huevo de la primera nidada y con $y$ al tamaño de cada huevo de la segunda.

Si la probabilidad de que la hembra sobreviva hasta poner su primera nidada es de $1/2$, y la probabilidad de que sobreviva hasta la segunda es de $1/8$, se describe entonces la aptitud reproductiva de la mariposa por medio de la función:

$$f(x,y) = \frac{3}{2}h(x) + \frac{3}{8}h(y).$$

Halle el tamaño de huevo óptimo de las dos nidadas para maximizar la aptitud reproductiva, sabiendo que los recursos disponibles para la reproducción están restringidos por la ecuación

$$x + y = 11.$$

**16.** Determine los extremos absolutos de

$$f(x,y) = xy\,(15 - 5y - 3x).$$

en la región triangular limitada por la recta $5y + 3x = 15$ y los ejes $x$ e $y$.

**17.** Determine los extremos absolutos de $f$ restringida a $A$ en los siguientes casos:

*a)* $f(x,y) = xy\,(x-y)^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x > 0, y > 0\}$

*b)* $f(x,y) = x\cos(y), \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\pi\}$

*c)* $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3\}$

*d)* $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$

*e)* $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \le 9\}$

*f)* $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

*g)* $f(x,y,z) = x^2 - y^2, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

**18.** Tres alelos $A$, $B$ y $O$ determinan los cuatro grupos sanguíneos: A ($AA$ o $AO$), B ($BB$ o $BO$), O ($OO$) y AB ($AB$). La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos que lleva dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde $p$, $q$ y $r$ son las proporciones de $A$, $B$ y $O$ en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1$ para mostrar que $P$ vale a lo sumo $\frac{2}{3}$.

**19.** Considere una comunidad formada por tres especies cuyas proporciones relativas son $p_1$, $p_2$ y $p_3$ respectivamente. La diversidad de la comunidad se suele medir con el índice de Shannon-Weaver

$$H(p_1,p_2,p_3) = -p_1\ln(p_1) - p_2\ln(p_2) - p_3\ln(p_3)$$

donde $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Usando que $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, observe que $H$ se puede definir cuando $p_1 = 0$ como

$$H(0,p_2,p_3) = -p_2\ln(p_2) - p_3\ln(p_3)$$

para $p_2 > 0$ y $p_3 > 0$, y $H(0,1,0) = H(0,0,1) = 0$. Análogamente, se puede definir cuando $p_2 = 0$ o $p_3 = 0$.

Muestre que $H$ alcanza un máximo absoluto cuando $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.