MATEMÁTICA 2 - Verano 2026

Práctica 2 - Espacios vectoriales

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Ejercicio 1.

i) Sea $K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \mid a_i \in K\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K. Se definen la suma y el producto por escalares como:

- $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- $k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (ka_i)_{i\in\mathbb{N}}$

Probar que $K^{\mathbb{N}}$, con la suma y el producto por escalares definidos, es un K-espacio vectorial.

ii) Dado un conjunto no vacío X, sea $K^X = \{f : X \to K \text{ tal que } f \text{ es una función}\}$,

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\, x \in X$
- $(k.f)(x) = k.f(x) \quad \forall\, x \in X$

Probar que K^X, con la suma y el producto por escalares definidos, es un K-espacio vectorial.

Ejercicio 2. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial.

i) $S = \{a.i \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad V = \mathbb{C}, \quad K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

ii) $S = \{f \in K[X] \mid f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \le n\}$, $V = K[X]$

iii) $S = \{f \in K[X] \mid f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \ge n\}$, $V = K[X]$

iv) $S = \{M \in K^{n\times n} \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$, $V = K^{n\times n}$

v) $S = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f''(1) = f(2)\}$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

vi) $S = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + af' + bf = 0\}$ (a y $b \in \mathbb{R}$ fijos), $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $K = \mathbb{R}$

vii) $S = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_r = 0\ \forall\, r \ge k\}$, $V = K^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 3. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in K^n \mid A.x = 0\}$ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz asociada es A. Probar que S es un subespacio de K^n.

Ejercicio 4. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0, x - y = 0\}$

ii) $\{f \in \mathbb{R}[X]_{\le 4} \mid f(1) = 0, f(2) = f(3)\}$

iii) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = -A^t\}$

iv) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f''' = 0\}$

(∗) **Ejercicio 5.** Probar que $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\} = \langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle$.

(Sugerencia: Probar que si $f'' + f = 0$, entonces $\frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} x}{\cos x}$ es constante en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

ii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

iii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

Ejercicio 7. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v,\, w \in V$, $k \in K$. Entonces $\langle v,\, w\rangle = \langle v,\, w + kv\rangle$.

ii) Sean $v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle v_1,\, v_2,\, w\rangle = \langle v_3,\, v_4,\, w\rangle$. Entonces $\langle v_1,\, v_2\rangle = \langle v_3,\, v_4\rangle$.

iii) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v_1,\, v_2,\, v_3,\, w \in V$. Entonces:

$$\langle v_1,\, v_2,\, v_3,\, w\rangle = \langle v_1,\, v_2,\, v_3\rangle \iff w \in \langle v_1,\, v_2,\, v_3\rangle$$

Ejercicio 8. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K.

i) $\{(1-i, i),\, (2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$ para $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\{(1-X)^3,\, (1-X)^2,\, 1-X,\, 1\}$ en $K[X]$

iii) $\{f, g, h\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, siendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x\cos x$, $K = \mathbb{R}$

iv) $\{f, g, h\}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, siendo $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{-x}$, $K = \mathbb{R}$

Ejercicio 9. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente independiente.

i) $\{(k, 1, 0)\,,\, (3, -1, 2)\,,\, (k, 2, -2)\} \subset \mathbb{R}^3$

ii) $\{(1, 0, 2, k), (1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, k-1)\} \subset \mathbb{R}^4$

iii) $\{kX^2 + X\,,\, X^2 - k\,,\, k^2X\} \subset \mathbb{R}[X]$

iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

Ejercicio 10. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales.

i) $\mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

ii) $\{A \in K^{n\times n} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

iii) $\{f \in \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \mid f(2) = f'(2) = 0\}$, $K = \mathbb{R}$

iv) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid a_i = a_j\ \forall\, i, j\,\}$

Ejercicio 11.

i) Probar que el conjunto $\{(1, 0, 0),\, (0, i, 0),\, (1, 1, i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Calcular la dimensión de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

ii) Probar que el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial pero no como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

iii) Probar que $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ es una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

Ejercicio 12. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

i) $\{(1, 1, 1, 1),\, (0, 2, 1, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$

ii) $\{X^3 - 2X + 1,\, X^3 + 3X\}$, $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, $K = \mathbb{R}$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 13. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores.

i) $S = \langle (1, 1, 2),\ (2, 2, 5),\ (1, 1, 4),\ (5, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$

ii) $S = \langle X^2 + 2X + 1,\ X^2 + 3X + 1,\ X + 2\rangle \subseteq \mathbb{R}[X]$, $K = \mathbb{R}$

iii) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial S para cada $k \in \mathbb{R}$.

i) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$

ii) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -k^2 & -1 \\ -1 & 1 & k \\ -1 & k^2 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Ejercicio 15. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$\langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\rangle$$

Ejercicio 16. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, -3)\}$

ii) $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3,\ X + 1,\ X^2 + 5,\ X^3 + X^2\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos, calcular la matriz $C(B, B')$, hallar las coordenadas de v respecto de B y, utilizando $C(B, B')$, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$, $v = (-1, 5, 6)$

ii) $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, $B = \{3,\ X + 1,\ X^2\}$, $B' = \{1,\ X + 3,\ X^2 + X\}$, $v = X$

iii) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$, $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$

iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11},\ E^{12},\ E^{21},\ E^{22}\}$
(la matriz E^{ij} es la matriz que tiene un 1 en el lugar ij y 0 en todos los demás lugares),
$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$, $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Ejercicio 18. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar:

i) una base B_1 de K^3 tal que $M = C(B_1, B)$.

ii) una base B_2 de K^3 tal que $M = C(B, B_2)$.

($*$) **Ejercicio 19.** Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dos bases de K^n. Sea M la matriz cuyas columnas son $v_1, \ldots, v_n$ y sea N la matriz cuyas columnas son $w_1, \ldots, w_n$ (ordenadamente). Probar que $C(B, B') = N^{-1}M$.

Ejercicio 20. En cada uno de los siguientes casos caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$ de V. Determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + z = 0,\ x - y = 0\}$ y $T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$

iii) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(1) = 0\}$ y $T = \langle 1,\ X,\ X^2,\ X^3 + 2X^2 - X,\ X^5 \rangle$

iv) $V = \mathbb{R}[X]$, $S = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f'(0) = f''(0) = 0\}$

Ejercicio 21. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$.

Ejercicio 22. En cada uno de los siguientes casos probar que S y T son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

i) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 0\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ es constante}\}$

ii) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $S = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
(los elementos de S se llaman *funciones pares* y los de T, *funciones impares*)

iii) $V = K^{n \times n}$, $S = \{A \in K^{n \times n} \mid A = A^t\}$ y $T = \{A \in K^{n \times n} \mid A = -A^t\}$
(los elementos de S se llaman *matrices simétricas* y los de T, *matrices antisimétricas*)

Ejercicio 23. Para cada S dado, hallar un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$.

i) $S = \langle (1, 2, -1, 3),\ (2, 3, -2, 1),\ (0, 1, 0, 7) \rangle$, $V = \mathbb{R}^4$

ii) $S = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$, $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$

iii) $S = \langle 3, 1 + X^2 \rangle$, $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$

Ejercicio 24. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar:

i) S, T subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\dim S = \dim T = 2 \Rightarrow \exists\, v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$

ii) S, T, W subespacios de $\mathbb{R}^5$, $\dim S = \dim T = \dim W = 2 \Rightarrow \dim(S \cap T \cap W) \geq 1$

$(*)$ **Ejercicio 25.** Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un *hiperplano* de V (es decir, un subespacio de dimensión $n - 1$).

i) Probar que para todo $v \in V$ tal que $v \notin T$, vale $T \oplus \langle v \rangle = V$.

ii) Si S es un subespacio de V de dimensión r tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$ y calcular $\dim(S \cap T)$.