

Práctica 8

En lo que sigue \mathcal{M} será la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de \mathbb{R} y μ la medida de Lebesgue.

1. Sea X un conjunto y sea

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ es contable o } X \setminus A \text{ es contable}\}.$$

Pruebe que \mathcal{A} es una σ -álgebra.

2. Sea X un conjunto y sea \mathcal{A} una σ -álgebra de subconjuntos de X . Pruebe que:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$ y $A \triangle B \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} es cerrada por intersecciones numerables.

3. Pruebe que todo subconjunto numerable de \mathbb{R} es nulo.

4. Pruebe que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ los intervalos $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, +\infty)$ son medibles Lebesgue, y calcule su medida.

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Pruebe que si A es abierto entonces $A \in \mathcal{M}$.
- Deduzca que si A es cerrado entonces $A \in \mathcal{M}$.

Sugerencia: para el ítem (a), usar (y probar) el siguiente ejercicio de cardinalidad.

Sea I un conjunto (de índices). Supongamos que existe una familia de intervalos $\{A_i\}_{i \in I}$ indexada por I tal que:

- $\#A_i > 1$ para todo $i \in I$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Entonces I es contable.

6. Calcule la medida de Lebesgue de \mathbb{Q} y la de los irracionales del $[0, 1]$. ¿Por qué son medibles estos conjuntos?
7. Pruebe que todo conjunto acotado de \mathcal{M} tiene medida finita. Muestre un conjunto de \mathcal{M} que tenga medida de Lebesgue finita pero que no sea acotado.
8. Si $A, B \in \mathcal{M}$, pruebe que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

9. Sea $A \in \mathcal{M}$. Pruebe que si $\mu(A) = 0$ entonces $A^\circ = \emptyset$. ¿Vale la recíproca?
10. Sea $A \subseteq [0, 1]$ un conjunto medible Lebesgue tal que $\mu(A) = 1$. Pruebe que A es denso en $[0, 1]$.
11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- $A \in \mathcal{M}$.
 - Existen una sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados contenidos en A y un conjunto Z de medida nula tales que $A = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) \cup Z$.
 - Existen una sucesión $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que contienen a A y un conjunto H de medida nula tales que $A = (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n) \setminus H$.
12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe que $A \in \mathcal{M}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen conjuntos G abierto y F cerrado tales que $F \subseteq A \subseteq G$ y $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.
13. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \triangle B) = 0$. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.
14. Recordemos que para $c \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ denotamos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

- Pruebe que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $cA \in \mathcal{M}$.
 - Pruebe que si $c > 0$ entonces $\mu(cA) = c\mu(A)$.
 - ¿Qué se puede decir de $\mu(cA)$ en el caso $c < 0$?
15. Pruebe que existe una función sobreyectiva $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que vale 0 en casi todo punto de $[0, 1]$. ¿Puede una tal función ser continua?
-