

## Práctica 6

1. Pruebe que  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  definen normas en  $\mathbb{R}^n$ , donde

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

2. Sea  $E$  un espacio normado. Pruebe que se verifican:

- Si  $x \in E$  y  $r > 0$ ,  $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$  (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$ .
- Si  $y, z \in B(x, r)$  entonces para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $ty + (1-t)z \in B(x, r)$  (es decir, toda bola es *convexa*).

3. Sea  $E$  un espacio normado. Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  y  $x_0 \in E$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Pruebe que si definimos  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  por

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ .

4. Sea  $E$  un espacio normado y  $S \subseteq E$  un subespacio (vectorial). Pruebe que:

- $\overline{S}$  también es un subespacio.
- Si  $S \neq E$ , entonces  $S^\circ = \emptyset$ .
- Si  $\dim(S) < \infty$ , entonces  $S$  es cerrado.
- Si  $S$  es un hiperplano, entonces  $S$  es o bien denso o bien cerrado en  $E$ .

5. Sea  $\mathbb{R}_n[t]$  el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que  $n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ . Consideremos para  $p \in \mathbb{R}_n[t]$  las normas

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)| \quad \text{y} \quad \|p\|_1 = \int_0^1 |p(t)| dt.$$

- ¿Son  $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_\infty)$  y  $(\mathbb{R}_n[t], \|\cdot\|_1)$  espacios de Banach? ¿Por qué?
- Justifique por qué ambas normas resultan equivalentes en  $\mathbb{R}_n[t]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Si  $\mathbb{R}[t]$  denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , pruebe que ahí las normas  $\|\cdot\|_\infty$  y  $\|\cdot\|_1$  no son equivalentes. ¿Hay alguna contradicción con el ítem anterior, que afirma que las normas son equivalentes para polinomios de grado hasta  $n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ?

6. Definimos  $\ell^\infty$  como el espacio de todas las sucesiones acotadas de números reales:

$$\ell^\infty = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

- (a) Pruebe que la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de  $\ell^\infty$  no es compacta.
- (b) Pruebe que no hay ningún conjunto numerable denso en  $\ell^\infty$ .

7. Sea  $E \subseteq \ell^\infty$  el (sub)espacio normado definido como

$$E = \{a \in \ell^\infty : \text{existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\},$$

dentro del cual consideramos el subespacio

$$S = \left\{ a \in E : \sum_{n \geq 1} a_n = 0 \right\}.$$

Pruebe que  $S$  es denso en  $E$ .

8. Sean  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  espacios normados. Sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal. Pruebe que son equivalentes:

- (a)  $T$  es continuo en 0.
- (b) Existe  $x_0 \in E$  tal que  $T$  es continuo en  $x_0$ .
- (c)  $T$  es continuo.
- (d)  $T$  es uniformemente continuo.
- (e)  $T$  es acotado.
- (f) Para todo  $A \subseteq E$  acotado,  $T(A)$  es acotado.

9. Sean  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  espacios normados, y sea  $T : E \rightarrow F$  lineal y continuo. Verifique las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

10. Consideremos en  $C([0, 1])$  las normas

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad \text{y} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Sean  $\mathcal{E}, \mathcal{I} : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  las funcionales lineales definidas por

$$\mathcal{E}f = f(0), \quad \mathcal{I}f = \int_0^1 f(x) dx.$$

Decida, para cada una de las normas, si cada una de las funcionales es continua; en caso afirmativo, acote su norma.

11. Consideremos en  $C([0, 1])$  la norma infinito. Fijada  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, sea  $K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$  dada por

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Pruebe que  $K$  es lineal y continua. Acote su norma.

12. Sea  $\mathbb{R}[t]$  el espacio de polinomios, con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  definida en el Ejercicio 5. Sea  $\delta : \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$  dado por  $(\delta p)(t) = p'(t)$ , donde  $p'$  denota el derivado de  $p$ . Probar que  $\delta$  es un operador lineal que no es continuo.
13. Sea  $\ell^2$  el espacio vectorial de todas las sucesiones de cuadrado sumable:

$$\ell^2 = \left\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Para  $a \in \ell^2$  definimos

$$\|a\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

- (a) ¿Es compacta la bola cerrada de centro 0 y radio 1 de  $\ell^2$ ?
- (b) Pruebe que  $\gamma : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es una funcional lineal continua.

*Sugerencia:* use la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

---