

Práctica 5

Compacidad

1. Sea $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Pruebe, por definición, que K es compacto.
2. Sea K un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R} . Pruebe que K tiene mínimo y máximo.
3. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto. Pruebe que los subconjuntos de \mathbb{R}

$$S = \{x + y : x, y \in K\}, \quad P = \{x \cdot y : x, y \in K\}$$

también son compactos.

4. Sea E un espacio métrico y sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de E . Pruebe que si existe $i_0 \in I$ tal que F_{i_0} es compacto, entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ es compacto.
5. Sea E un espacio métrico. Pruebe que E es compacto si y solo si para toda sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ decreciente (es decir, $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) de cerrados no vacíos de E se tiene que $\bigcap_{n \geq 1} F_n \neq \emptyset$.
6. Sea E un espacio métrico discreto. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de E ?
7. Pruebe que la unión de un número finito de conjuntos compactos es compacto.
8. Pruebe que en un espacio métrico (E, d) la distancia de un punto a un compacto *se realiza*. Esto es, que para todo compacto $K \subseteq E$ y para todo $x \in E$ existe $y \in K$ tal que $d(x, y) = d(x, K)$.
9. Sea (E, d) un espacio métrico, y sea \widehat{d} la función definida en el Ejercicio 11 de la Práctica 3. Pruebe que si $A \subseteq E$ es compacto, $B \subseteq E$ es cerrado y se cumple que $A \cap B = \emptyset$, entonces $\widehat{d}(A, B) > 0$. ¿Sucede lo mismo si A es solo cerrado?
10. Consideremos en $(C[0, 1], d_\infty)$ la función f_0 nula. Pruebe que $\overline{B(f_0, 1)}$ no es compacta (pero sí es cerrada y acotada). ¿Qué pasa si cambiamos d_∞ por d_1 ?
11. Sea E un espacio métrico compacto, y sea $f : E \rightarrow (0, +\infty)$ una función continua. Pruebe que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in E$.
12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Pruebe que f es uniformemente continua en \mathbb{R} .

13. Sean E y E' espacios métricos y $f : E \rightarrow E'$ continua. Pruebe que si E es compacto y f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.

Teoremas de punto fijo

14. Sea E un espacio métrico y sea $f : E \rightarrow E$ continua. Pruebe que el conjunto de puntos fijos de f es cerrado.
15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(x) + 3$. Pruebe que f es una contracción.
16. Sea $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con la distancia usual de \mathbb{R} . Sea $f : E \rightarrow E$ dada por $f(x) = \frac{1}{3}x$. Pruebe que f es una contracción pero no tiene punto fijo. ¿Qué falla del Teorema de Banach?
17. Sea E un espacio métrico y sea $f : E \rightarrow E$ una función. Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos por $f^n : E \rightarrow E$ a la función $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n veces). Pruebe las siguientes afirmaciones:
- (a) Si $x \in E$ es punto fijo de f , entonces es punto fijo de f^n .
 - (b) Si E es completo y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que f^n es una contracción, entonces existe un único punto fijo de f en E .
Sugerencia: pruebe que si $x \in E$ es punto fijo de f^n , entonces $f(x)$ también lo es.
 - (c) Deduzca que existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = x$.
18. Considere en \mathbb{R}^n la métrica d_2 . Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Supongamos que existe $M > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in B(0, M)$ tal que $d_2(x, f(x)) < \varepsilon$. Pruebe que f tiene un punto fijo.
19. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Pruebe que f tiene un punto fijo.
Sugerencia: use el teorema de Bolzano.
-