

## MATEMÁTICA 2 - Verano 2024

### Práctica 5 - Diagonalización y subespacios invariantes

#### Ejercicio 1.

- i) Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz  $A$  en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ ).

$$\begin{array}{lll}
 a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & d) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} & f) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 b) A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} & & \\
 c) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} & e) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & g) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}
 \end{array}$$

- ii) Para cada una de las matrices del ítem anterior, decidir si  $A$  es diagonalizable sobre  $K$ , para  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$ . En caso afirmativo, exhibir una matriz inversible  $C \in K^{n \times n}$  y una matriz diagonal  $D \in K^{n \times n}$  tales que  $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal  $f(x, y, z) = (-2x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 3z)$ .

- i) Encontrar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B$  sea diagonal.

ii) Calcular  $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

iii) Hallar, si es posible, una matriz  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $M^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  un proyector con  $\dim(\text{Im}(f)) = s$ . Probar que  $f$  es diagonalizable (Sugerencia: ver Práctica 3). Calcular  $\mathcal{X}_f$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$  la transformación lineal derivación. Mostrar que para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la función  $f(x) = e^{\lambda x}$  es un autovector de  $\delta$  asociado al autovalor  $\lambda$ . (Observar que entonces  $\delta$  tiene infinitos autovalores.)

**Ejercicio 5.** Sea  $A \in K^{n \times n}$ .

- i) Probar que  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.
- ii) Probar que  $A$  es inversible si y sólo si  $0$  no es autovalor de  $A$ .
- iii) Probar que si  $A$  es inversible y  $v$  es un autovector de  $A$ , entonces  $v$  es un autovector de  $A^{-1}$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ . Determinar todos los  $a, b$  y  $c \in K$  tales que  $A$  es diagonalizable.

**Ejercicio 7.** Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k + k^2 & -k^2 \\ 0 & k + 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Dada  $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .

*Sugerencia:* No es necesario calcular  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  explícitamente.

**Ejercicio 9.**

i) Se define la sucesión de Fibonacci  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

a) Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Verificar que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ .

b) Probar que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ .

c) Encontrar una matriz inversible  $C$  tal que  $C^{-1} \cdot A \cdot C$  sea diagonal.

d) Hallar la fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

ii) Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

**Ejercicio 10.**

i) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = -1$ .

*Sugerencia:* Hallar una matriz inversible  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$  sea diagonal y

hacer el cambio de variables  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

ii) Probar que  $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : f'' = f\} = \langle e^x, e^{-x} \rangle$ .

*Sugerencia:* Llamar  $g = f'$  y considerar el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} f' = g \\ g' = f \end{cases}$ .

**Ejercicio 11.** Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular  $A^{1000}$  para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- ii) Calcular  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \forall n \in \mathbb{N}$ .
- iii) Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ , expresar  $A^{-1}$  como combinación lineal de  $A$  y de  $I_2$ .

**Ejercicio 12.**

- i) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal definida por  $f(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$ . Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f$ -invariantes.
- ii) Sea  $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la rotación de ángulo  $\theta$ , definida por  $|f_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Probar que, para todo  $\theta \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $f_\theta$  no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{R}^2$  que sean  $f_\theta$ -invariantes.
- iii) Sea  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $g_\theta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  la transformación  $\mathbb{C}$ -lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

¿Es  $g_\theta$  diagonalizable? Hallar todos los subespacios de  $\mathbb{C}^2$  que sean  $g_\theta$ -invariantes.

**Ejercicio 13.** Sea  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -16 & -22 \\ 0 & 3 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

- i) Probar que el subespacio  $\langle (2, -1, 0, 0), (-1, 2, -1, 0) \rangle$  es  $f_A$ -invariante.
- ii) Encontrar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que

$$|f_A|_B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & l \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 14.**

- i) Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\mathcal{X}_A(x) = (x - \alpha)(x - z)(x - \bar{z})$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Sea  $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (resp.  $g_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ) la transformación lineal cuya matriz en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{C}^3$ ) es  $A$ .
- a) Probar que existe  $v_1$ , autovector de  $g_A$  de autovalor  $\alpha$ , con todas sus coordenadas reales.
- b) Sea  $w = v_2 + iv_3$ , con  $v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ , un autovector de  $g_A$  asociado al autovalor  $z$ . Probar que  $\bar{w} = v_2 - iv_3$  es un autovector de  $g_A$  de autovalor  $\bar{z}$ .
- c) Probar que  $\langle v_2, v_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$  es un subespacio  $f_A$ -invariante de dimensión 2.
- d) Sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Verificar que  $B$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  y hallar  $|f_A|_B$ .

ii) Sea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Hallar subespacios propios  $S$  y  $T$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f_A$ -invariantes, tales que  $S \oplus T = \mathbb{R}^3$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4, x_5, 0).$$

- i) Hallar, para cada  $0 \leq i \leq 5$ , un subespacio  $S_i$  de  $\mathbb{R}^5$  con  $\dim(S_i) = i$  que sea  $f$ -invariante.
- ii) Probar que no existen subespacios propios  $f$ -invariantes  $S$  y  $T$  de  $\mathbb{R}^5$  tales que  $\mathbb{R}^5 = S \oplus T$ .