

MATEMÁTICA 2 - Verano 2024

Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

- i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$
- ii) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ (considerando a \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial y como \mathbb{C} -espacio vectorial).
- iii) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- iv) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$
- v) $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geoméricamente las siguientes transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- i) $f(x, y) = (x, 0)$
- ii) $f(x, y) = (x, -y)$
- iii) $f(x, y) = (x \cdot \cos t - y \cdot \sin t, x \cdot \sin t + y \cdot \cos t)$ con $t \in \mathbb{R}$ fijo.

Ejercicio 3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

- i) $tr : K^{n \times n} \rightarrow K$
- ii) $t : K^{n \times m} \rightarrow K^{m \times n}$, $t(A) = A^t$
- iii) $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$, $f(A) = B \cdot A$ donde $B \in K^{r \times n}$
- iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$
- v) $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$
- vi) $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

Ejercicio 4.

- i) Mostrar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.
- ii) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?
- iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 5.

- i) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales de los Ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .
- ii) Clasificar las transformaciones lineales tr , t y ϵ_α del Ejercicio 3 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 6.

- i) En cada uno de los siguientes casos probar que no existe una transformación lineal que verifique las condiciones pedidas.

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subseteq \text{Im}(f)$
 b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ epimorfismo
 c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ monomorfismo
 d) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ isomorfismo tal que $f(S) = T$, siendo S y $T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$.

ii) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que verifique $\text{Im}(f) = S$ y $\text{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

- a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, 2, 1) \rangle$
 b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (1, -2, 1) \rangle$

Ejercicio 7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 8. Sean $g : V \rightarrow V'$ y $f : V' \rightarrow V''$ transformaciones lineales. Probar:

- i) $\text{Nu}(g) \subseteq \text{Nu}(f \circ g)$
 ii) Si $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Nu}(g) = \text{Nu}(f \circ g)$
 iii) $\text{Im}(f \circ g) \subseteq \text{Im}(f)$
 iv) Si $\text{Im}(g) = V'$, entonces $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

- i) $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$
 ii) $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$
 iii) $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
 iv) $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$
 v) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
 vi) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

Ejercicio 10. Sea V un K -espacio vectorial. Una transformación lineal $f : V \rightarrow V$ se llama un *proyector* si y sólo si $f \circ f = f$.

- i) Probar que $f : V \rightarrow V$ es un proyector $\iff f(v) = v \quad \forall v \in \text{Im}(f)$.
 ii) En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido.

- a) $\text{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
 b) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$
 c) $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

iii) Sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que:

- a) $V = \text{Nu}(f) \oplus \text{Im}(f)$
 b) $g = id_V - f$ es un proyector con $\text{Nu}(g) = \text{Im}(f)$ e $\text{Im}(g) = \text{Nu}(f)$

- iv) Probar que si S y T son subespacios de V tales que $V = S \oplus T$, existe un único proyector $f : V \rightarrow V$ tal que $\text{Nu}(f) = S$ e $\text{Im}(f) = T$.

Ejercicio 11. Dada $f : V \rightarrow V$, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, 5x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3)$
- $B = B'$ la base canónica de \mathbb{R}^3 .
 - $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.
- ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2, x_1 + x_2)$
- $B = B'$ la base canónica de \mathbb{C}^2 como \mathbb{C} -espacio vectorial.
 - $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a \mathbb{C}^2 como \mathbb{R} -espacio vectorial.
- iii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$
- $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
 - $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.
- iv) $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B' = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$.

Ejercicio 12. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B' ?
- Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.
- Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

Ejercicio 13.

- En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ que verifique:
 - $A \neq I_3$ y $A^3 = I_3$
 - $A \neq 0$, $A \neq I_3$ y $A^2 = A$
- Hallar matrices no nulas $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tales que:
 - $A.B = 0$ y $B.A \neq 0$
 - $A.B = 0$ y $B.A = 0$

Ejercicio 14. En cada uno de los siguientes casos, exhibir una matriz A con coeficientes reales de manera que el sistema $A.x = b$ cumpla:

- No tiene solución o tiene solución única, dependiendo del valor de b .
- Tiene infinitas soluciones, independientemente del valor de b .
- No tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo del valor de b .
- Tiene solución única, independientemente del valor de b .

Ejercicio 15. Sea V un K -espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \rightarrow V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j; \quad i \leq \dim(\text{Im}(f)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$.

i) Determinar bases B y B' de \mathbb{R}^3 tales que $|f|_{BB'}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17. Calcular el rango de las siguientes matrices:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$ para cada $k \in \mathbb{R}$

Ejercicio 18.

i) Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times r}$. Probar que $\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A.B) \leq \text{rg}(B)$.

ii) Sean $A, B \in K^{m \times n}$. Probar que $\text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

Ejercicio 19.

i) Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $S = \{x \in K^n \mid A.x = 0\}$. Probar que $\text{rg}(A) + \dim(S) = n$.

(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

ii) Sean $A \in K^{m \times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $A.x = b$ y sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada. Probar que $A.x = b$ tiene solución $\iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b)$.