Álgebra I
Práctica 4 - Números enteros (Parte 1)

Divisibilidad

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \;\text{ y }\; b \mid c$
ii) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$
iii) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \;\text{ ó }\; 2 \mid b$
iv) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a \;\text{ ó }\; 9 \mid b$
v) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \;\text{ ó }\; a \mid c$
vi) $a \mid c \;\text{ y }\; b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$
vii) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$
viii) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$
ix) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$
x) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $3n - 1 \mid n + 7$
ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$
iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$
iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \neq b \in \mathbb{Z}$.
ii) Probar que si n es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.
iii) Probar que si n es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.

4. Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Sea $n \in \mathbb{N}$.

i) Probar que si n es compuesto, entonces $2^n - 1$ es compuesto.
(Los primos de la forma $2^p - 1$ para p primo se llaman *primos de Mersenne*, por Marin Mersenne, monje y filósofo francés, 1588-1648. Se conjetura que existen infinitos primos de Mersenne, pero aún no se sabe. Se conocen a la fecha 49 primos de Mersenne (Enero 2017). El más grande producido hasta ahora es $2^{74207281} - 1$, que tiene 22338618 dígitos, y es el número primo más grande conocido a la fecha.)

ii) Probar que si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de 2.
(Los números de la forma $\mathcal{F}_n = 2^{2^n} + 1$ se llaman *números de Fermat*, por Pierre de Fermat, juez y matemático francés, 1601-1665. Fermat conjeturó que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{F}_n$ era primo, pero esto resultó falso: los primeros $\mathcal{F}_0 = 3,\ \mathcal{F}_1 = 5,\ \mathcal{F}_2 = 17,\ \mathcal{F}_3 = 257,\ \mathcal{F}_4 = 65537$, son todos primos, pero $\mathcal{F}_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$. Hasta ahora no se conocen más primos de Fermat que los 5 primeros mencionados.)

6. i) Probar que el producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$.

ii) Probar que $\dbinom{2n}{n}$ es divisible por 2.

iii) Probar que $\dbinom{2n}{n}$ es divisible por $n+1$ (sugerencia: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$).

7. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $99 \mid 10^{2n} + 197$

ii) $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$

iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

iv) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

Algoritmo de División

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

i) $a = 133, \quad b = -14$

ii) $a = 13, \quad b = 111$

iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0$

iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0$

v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \ (n \in \mathbb{N})$

vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \ (n \in \mathbb{N})$

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de la división de

i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18

ii) la división de a por 3

iii) la división de $4a + 1$ por 9

iv) la división de $a^2 + 7$ por 36

v) la división de $7a^2 + 12$ por 28

vi) la división de $1 - 3a$ por 27

10. i) Si $a \equiv 22 \ (14)$, hallar el resto de dividir a a por 14, por 2 y por 7.

ii) Si $a \equiv 13 \ (5)$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.

iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i!$ por 36.

11. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 \equiv 3 \ (11)$.

ii) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3 \ (13)$.

iii) Probar que $a^2 \equiv -1 \ (5) \Leftrightarrow a \equiv 2 \ (5)$ ó $a \equiv 3 \ (5)$.

iv) Probar que $a^7 \equiv a \ (7)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

v) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ y $7 \mid b$.

vi) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow 5 \mid a$ ó $5 \mid b$.

12. i) Probar que $2^{5n} \equiv 1 \ (31)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31.

iii) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39 \ (31)$, hallar el resto de la división de k por 5.

iv) Hallar el resto de la división de $43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999}$ por 31.

Sistemas de numeración

13. i) Hallar el desarrollo en base 2 de

(a) 1365 (b) 2800 (c) $3 \cdot 2^{13}$ (d) $13 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}$

ii) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800.

14. Sea $a \in N_0$. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en k ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos k ceros.

15. i) ¿Cuáles son los números naturales más chico y más grande que se pueden escribir con exactamente n “dígitos” en base $d > 1$?

ii) Probar que $a \in \mathbb{N}_0$ tiene a lo sumo $[\log_2(a)] + 1$ bits cuando se escribe su desarrollo binario. (Para $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $[x]$ es la *parte entera de* x, es decir el mayor número natural (o cero) que es menor o igual que x.)

16. Sea $a = (a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0)_2$ un número escrito en base 2 (o sea escrito en bits). Determinar simplemente cómo son las escrituras en base 2 del número $2a$ y del número $a/2$ cuando a es par, o sea las operaciones "multiplicar por 2" y "dividir por 2" cuando se puede. Esas operaciones se llaman *shift* en inglés, o sea corrimiento, y son operaciones que una computadora hace en forma sencilla.

17. Enunciar y demostrar criterios de divisibilidad por 8, 9 y 11.

Máximo común divisor

18. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b:

i) $a = 2532$, $b = 63$

ii) $a = 5335$, $b = 110$

iii) $a = 131$, $b = 23$

iv) $a = n^2 + 1$, $b = n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

19. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que el resto de dividir b por 27 es 21, calcular $(a : b)$.

20. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

i) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 23$ da 41.

ii) Probar que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ o 43. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 16$ da 41.

21. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Probar que $7a - 3b$ y $2a - b$ son coprimos.

22. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $(a : b) = 2$. Probar que los valores posibles para $(7a + 3b : 4a - 5b)$ son 2 y 94. Exhibir valores de a y b para los cuales da 2 y para los cuales da 94.

23. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

Primos y factorización

24. i) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \le \sqrt{n}$.

ii) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001.

iii) Hallar todos los primos menores o iguales que 100.

25. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4.
Sugerencia: probar primero que si $a \neq \pm 1$ satisface $a \equiv 3 \pmod 4$, entonces existe p primo, $p \equiv 3 \pmod 4$ tal que $p \mid a$. Luego probar que si existieran sólo finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \dots, p_n$, entonces $a = -1 + 4 \prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y -1 que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

26. Sea p primo positivo.

i) Probar que si $0 < k < p$, entonces $p \mid \dbinom{p}{k}$.

ii) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.

27. Decidir si existen enteros a y b no nulos que satisfagan

i) $a^2 = 8b^2$ ii) $a^2 = 3b^3$ iii) $7a^2 = 11b^2$

28. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Probar que si p es un primo positivo entonces $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$.

29. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $p\,q \mid a^n$ entonces $p\,q \mid a$.

30. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si ab es un cuadrado en $\mathbb{Z}$ y $(a : b) = 1$, entonces tanto a como b son cuadrados en $\mathbb{Z}$.

31. Determinar cuántos divisores positivos tienen 9000, $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$ y $10^n \cdot 11^{n+1}$. ¿ Y cuántos divisores en total ?

32. Hallar la suma de los divisores positivos de $2^4 \cdot 5^{123}$ y de $10^n \cdot 11^{n+1}$.

33. Hallar el menor número natural n tal que $6552\,n$ sea un cuadrado.

34. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $(n : 945) = 63$, $(n : 1176) = 84$ y $n \leq 2800$

ii) $(n : 1260) = 70$ y n tiene 30 divisores positivos

35. Hallar el menor número natural n tal que $(n : 3150) = 45$ y n tenga exactamente 12 divisores positivos.

36. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$,

ii) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9, y dar un ejemplo para cada caso.

iii) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14, y dar un ejemplo para cada caso.

37. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que si $(a : b) = 1$ entonces $(a^2 \cdot b^3 : a + b) = 1$.

38. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 5$.

i) Calcular los posibles valores de $(ab : 5a - 10b)$ y dar un ejemplo para cada uno de ellos.

ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcular $(a^{n-1}b : a^n + b^n)$.

39. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $[n : 130] = 260$. ii) $[n : 420] = 7560$.

40. Hallar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

i) $(a : b) = 10$ y $[\,a : b\,] = 1500$ ii) $3 \mid a$, $(a : b) = 20$ y $[a : b] = 9000$