Elementos de Cálculo Numérico (M) - Cálculo Numérico

Curso de verano 2016

Práctica N°8: Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejercicio 1 Utilizar el método de Euler para resolver

$$\begin{cases} y' = -2y & \text{en } [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

empleando pasos $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.01$. Graficar las tres soluciones numéricas obtenidas junto con la solución exacta.

Ejercicio 2 Hacer el mapa de curvas integrales en la región $[0,10] \times [0,10]$ de la ecuación diferencial

$$y'(t) = (y(t) - 5)(\cos^2(t) - 0.5)$$

graficando, simultáneamente para $k = 0, 1, \ldots, 10$, la solución que se obtiene utilizando el método de Euler con paso $h = 0.01$ y con condición inicial

$$y(0) = k.$$

Ejercicio 3 Considerar el problema $\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

1. Probar que el método de Euler con paso h genera la sucesión:

$$y_i = (1 + \lambda h)^i y_0 \quad i = 0, 1, \ldots$$

2. Mostrar que si $\lambda < 0$, la solución exacta tiende a cero cuando x tiende a infinito.

3. Para $\lambda < 0$, determinar para qué valores de h ocurre que $y_i \to 0$ cuando $i \to \infty$.

Ejercicio 4 Se considera el problema

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t^2 + 3 & \text{en } [0,2] \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

1. Utilizar los métodos de Euler explícito e implícito, con paso $h = 0.05$ para obtener dos aproximaciones de la solución y graficarlas.

2. Graficar la solución que se logra al utilizar el comando **ode45** de `Octave`. Nota: para usar el comando **ode45** hay que instalar un paquete adicional. Consulte en http://octave.sourceforge.net. Si lo desea, también puede usar el comando **lsode** que suele estar incluido en la instalación estándar de `Octave`.

Ejercicio 5 Probar que una ecuación de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Mostrar que un problema de valores iniciales para la primera se transforma en un problema de valores iniciales para el sistema.

Ejercicio 6 Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \theta''(t) = -A\sin(\theta(t)) \text{ en } [0,T] \\ \theta'(0) = v_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

1. Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.
2. Utilizar el método de Euler, con paso $h = 0.05$ para obtener una aproximación de la solución y graficarla.
3. Graficar la solución que se logra al utilizar el comando **ode45** o el comando **lsode** de `Octave`.

Pueden considerarse, a modo de ejemplo, los valores $A = 7$, $T = 10$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_o = 0$.

Ejercicio 7 Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$y' = f(t, y)$$
$$y(t_0) = y_0,$$

en donde y es un vector, tomando como parámetros f, los tiempos inicial y final t_0 y t_f, el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y. Recuerde que el programa debe aceptar ecuaciones vectoriales.

Ejercicio 8 Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y'(t) = & 2y(t) - 5\sin(t) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

cuya solución exacta es la función $y(t) = 2\sin(t) + \cos(t)$. Graficar simultáneamente en el intervalo $[0, 4]$ la solución exacta y las que se obtienen con los métodos de Euler y Taylor de orden 2, ambos con paso $h = 0.05$.

Ejercicio 9 Escriba un programa que resuelva la ecuación diferencial del Ejercicio 8 por algún método de Runge-Kutta de orden 2 y de orden 4. Agregar estas soluciones al gráfico realizado en el Ejercicio 8.

Ejercicio 10 Probar que los métodos de Euler, Runge-Kutta y Taylor son consistentes.

Ejercicio 11 Hallar el error local para los métodos de Euler explícito e implícito.

Ejercicio 12 Hallar un paso h de modo que el error cometido al aplicar el método de Euler para estimar el valor de e como $y(1)$, donde $y(t)$ es solución de $y' = y,\ y(0) = 1$, resulte menor que 10^{-3}. Realizar el mismo trabajo para el método de Taylor de orden 2.

Ejercicio 13 Considerar el problema $y' = -2ty$, $y(0) = 1$, con $t \geq 0$.

1. Determinar una cota, en términos de h, para el error cometido si se usa el método de Euler para calcular $y(1)$.
2. ¿Cómo debería tomar h si desea que el error cometido sea menor que 10^{-2}?

3. Calcular la solución en $t = 1$ usando el valor de h obtenido en el ítem previo, y verificar las estimaciones previstas comparando con la solución exacta.

Ejercicio 14 Repetir los ítems (a) y (b) del ejercicio anterior para el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = & t\sin^2(y(t)) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

Ejercicio 15 Estudiar consistencia y dar una cota del error para el método de Euler aplicado al problema del péndulo (ejercicio 6).

Ejercicio 16 La trayectoria de una partícula que se mueve en el plano está dada por las curva $(y_1(t), y_2(t))$, donde las funciones y_1, y_2 son la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \end{aligned}$$

Resolver este sistema en el intervalo $[0, 20]$ con el método de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y graficar la trayectoria de la partícula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$. Realizar nuevamente el gráfico utilizando la solución obtenida con el comando **ode45** o con el comando **lsode**.

Ejercicio 17 Considerar la ecuación $y'(t) = f(t, y(t))$.

1. Deducir la fórmula de Milne:

   $$y_n = y_{n-2} + h(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}),$$

   aproximando la integral

   $$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t))dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t)dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

   con la fórmula de Simpson. Puede usar el Ejercicio 16 de la Práctica 7.

2. Proceder en forma análoga al ítem anterior y dar un método multipaso de la forma

   $$y_{n+1} - y_n = h\big[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2}\big].$$

3. Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) de los métodos de los ítems anteriores y calcular su orden.

Ejercicio 18 Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su orden.

1. **Adams-Bashforth.**

   $$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

2. **Adams-Moulton.**

   $$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

Ejercicio 19 Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ de modo que el método resultante tenga orden 4.

Ejercicio 20 Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$