Elementos de Cálculo Numérico (M) - Cálculo Numérico

Curso de verano 2016

Práctica N°7: Integración numérica

Ejercicio 1 Usar las fórmulas cerradas de Newton-Cotes de dos y tres puntos (reglas de trapecios y de Simpson, respectivamente) para aproximar las integrales:

$$\int_0^1 x^4\,dx \qquad \int_{0.1}^{0.2} \ln(x)\,dx \qquad \int_0^{0.3} \frac{1}{1+x}\,dx$$

Calcular, además, en forma exacta cada una de las integrales anteriores y verificar la cota del error.

Ejercicio 2 Interpolando las funciones de base de Lagrange, hallar una fórmula de cuadratura por interpolación de la forma

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h).$$

Para una función f de clase C^2 probar que el error cometido no excede el valor $\dfrac{\|f''\|_\infty}{2}h^3$.

Ejercicio 3 Usar el método de coeficientes indeterminados para dar una fórmula de cuadratura por interpolación:

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(3h).$$

Ejercicio 4 Construir la fórmula abierta de Newton-Cotes para calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ con nodos $-1/2,\ 0,\ 1/2$, y la fórmula cerrada de Newton-Cotes con nodos en los puntos $-1,\ -1/3,\ 1/3,\ 1$.

Ejercicio 5 Considerar la función definida en $[-h,h]$ $(h>0)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -h \le x \le 0 \\ x, & \text{si } \quad 0 < x \le h. \end{cases}$$

Hallar el error de la regla de trapecios aplicada a $f(x)$. ¿El orden es igual al obtenido para una función suficientemente suave?

Ejercicio 6 La fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)$$

es conocida como *Regla de los Rectángulos.* Acotar el error que se comete al utilizarla para una $f \in C^1[a,b]$.

Ejercicio 7

1. Hallar una fórmula de cuadratura del tipo:
$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx \sim Af(-2) + Bf(0) + Cf(2).$$
2. Para $f \in C^3[-2,2]$ probar que el error cometido no excede el valor $\frac{7}{12}\|f^{(3)}\|_\infty$.

Ejercicio 8 Escribir programas que reciban una función f y los límites del intervalo $[a,b]$, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson para aproximar $\int_a^b f$.

Ejercicio 9 Escribir programas que reciban una función f, los límites del intervalo $[a,b]$ y un parámetro n, y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar $\int_a^b f$, partiendo $[a,b]$ en n intervalos.

Ejercicio 10 Se sabe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{4}$.

1. Para $n = 1,\dots,100$, utilizar las reglas de trapecios y Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π.
2. Graficar las sucesiones obtenidas junto con el valor de π que arroja `Octave` y el valor que se obtiene al aplicar la rutina **quad** de `Octave`.

Ejercicio 11

1. Calcular exactamente la integral
$$I = \int_0^{2\pi} [1 - \cos(32x)]\ dx.$$
2. Aproximar el valor de I usando el programa del Ejercicio 8 con los métodos de los trapecios, Simpson, trapecios compuesta y Simpson compuesta para $n = 2, 4, 8$ y 16.
3. Calcular el valor de I que produce la rutina **quad**.

Ejercicio 12 Se quiere calcular $\int_{-1}^1 e^{-x^2}\ dx$ utilizando la regla de trapecios compuesta, partiendo el intervalo $[-1,1]$ en n subintervalos. Hallar n de modo que el error sea menor que 10^{-3}.

Ejercicio 13 Probar que una cuadratura $Q_n(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$ es lineal.

Ejercicio 14 Determinar el grado de precisión de las siguientes cuadratura para aproximar $\int_{-1}^1 f(x)\ dx$:

1. $\frac{4}{3}f(-0.5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0.5)$.
2. $\frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$.

Ejercicio 15 Hallar reglas de cuadratura de grado de precisión máximo para aproximar $\int_{-3}^3 f(x)\ dx$, de las siguientes formas:

1. $A[f(x_0) + f(x_1)]$ (repitiendo el coeficiente).

2. $Af(x_0) + Bf(x_0+4)$.

y determinar cuáles son dichos grados.

Ejercicio 16 Sea $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva. Demostrar que para todo conjunto de nodos $\{x_1, \ldots, x_n\}$, coeficientes $A_1, \ldots, A_n$, y para todo intervalo $[c,d]$; el grado de precisión de la forma de cuadratura

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \sim \int_a^b f(x)w(x)dx$$

es el mismo que el de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} B_i f(y_i) \sim \int_c^d f(x)\tilde{w}(x)dx$$

donde $l : [a,b] \to [c,d]$ es la función lineal que transforma al intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[c,d]$, $B_i = \frac{d-c}{b-a}A_i,\ y_i = l(x_i)$ y $\hat{w} : [c,d] \to \mathbb{R}$ está definida por $\hat{w}(x) = w(l^{-1}(x_i))$.

Ejercicio 17 Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)x^2\ dx$ mediante una regla de cuadratura de la forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^2\ dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

Ejercicio 18

1. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{|x|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

2. Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{0}^{4} f(x)\sqrt{\left|\frac{x-2}{2}\right|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? Sugerencia: Usar el ejercicio 16.

Ejercicio 19 Sea w una función de peso. Se considera la regla de cuadratura de 1 punto:

$$\int_a^b f(x)w(x)\ dx \sim A_0 f(s).$$

1. Probar que, cualquiera sea w, la fórmula tiene grado de precisión máximo si

$$s = \frac{\int_a^b xw(x)\ dx}{\int_a^b w(x)\ dx}.$$

2. Probar que si $w(x) \equiv 1$, esta regla coincide con la regla de los rectángulos.

3. Considerar el intervalo $[-1, 1]$ y $w(x) = (x-1)^2$. Acotar el error que produce el uso de esta regla para funciones C^1.

Ejercicio 20 Hallar los pesos y los nodos de las fórmulas de Gauss-Legendre de dos y tres puntos. (Los polinomios de Legendre mónicos de grado dos y tres son $x^2 - \frac{1}{3}$ y $x^3 - \frac{3}{5}x$).

Ejercicio 21 Usar las fórmulas de Gauss-Legendre de tres puntos para estimar:

$$\text{(a)} \quad \int_{-1}^{1} \sin(3x)\ dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_{1}^{3} \ln(x)\ dx, \qquad \text{(c)} \quad \int_{1}^{2} e^{x^2}\ dx.$$

Ejercicio 22 Probar que una fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)w(x)\ dx \sim Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

no puede tener grado de precisión mayor que $2n+1$, independientemente de la elección de los coeficientes (A_j) y de los nodos (x_j).

Sugerencia: Hallar un polinomio $p \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ para el cual $Q_n(p) \neq \displaystyle\int_a^b p(x)w(x)\ dx$.

Ejercicio 23 Para una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se quiere dar una fórmula de cuadratura que aproxime $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$, con $D \subset \mathbb{R}^2$, mediante el Teorema de Fubini de la siguiente manera:

1. Si $D = [0,1] \times [0,1]$, se define la función $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)\, dy$ y luego

   - Se aproximan los valores $F(0), F(\frac{1}{2}), F(1)$ con la regla de Simpson.
   - Se aproxima $\displaystyle\int_0^1 F(x)\, dx$ usando otra vez la misma regla.

   Hallar explícitamente la regla que se obtiene.

2. Repetir el procedimiento y dar la fórmula correspondiente para D el triángulo de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$.

   Sugerencia: considerar $F(x) = \displaystyle\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy$.

3. Probar que si D es el triángulo de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$ la fórmula anterior es exacta para $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Ejercicio 24 Escriba un programa en `Octave` que calcule las cuadraturas para integrales dobles del Ejercicio 23 .