

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (M) - CÁLCULO NUMÉRICO  
Curso de verano 2016

**Práctica N°5: Interpolación**

**Ejercicio 1.** Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular el polinomio  $p(x)$  interpolador de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange. Verificar utilizando el comando `polyfit` de `Octave`. Graficar el polinomio interpolador, usando el comando `polyval`.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27
x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

**Ejercicio 2.** Repetir el ejercicio anterior usando el método de coeficientes indeterminados.

**Ejercicio 3.** Considere  $\phi_i : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\phi_0(f) &= f(0) \\ \phi_1(f) &= f(1) \\ \phi_2(f) &= \int_0^1 f(t) dt\end{aligned}$$

1. Encontrar una base  $\{p_0, p_1, p_2\}$  de  $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  tal que, para todos  $0 \leq i, j \leq 2$ ,  $\phi_i(p_j)$  valga 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ .
2. Dada  $f \in C[0, 1]$  considere el interpolador  $I_f(x) = \sum_{i=0}^2 \phi_i(f)p_i(x)$ . Probar que para todo  $p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  se tiene  $I_p = p$ .

**Ejercicio 4.** a) Construir las tablas de diferencias divididas para los datos del Ejercicio 1, y emplearlas para construir los polinomios interpoladores.

b) Agregar a las tablas de datos del Ejercicio 1 el punto  $x = 4$ ,  $y = 1$ . Aumentar las tablas de diferencias divididas y calcular los polinomios interpoladores.

**Ejercicio 5.** Considerar la función  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Graficar  $f$  junto con los polinomios que resultan de interpolar a  $f$  en los  $n + 1$  puntos equiespaciados  $x_0 = -1, \dots, x_i = x_0 + \frac{2i}{n}, \dots, x_n = 1$ ; para  $n = 5, 10, 15$ .

**Ejercicio 6.** Repetir el Ejercicio 5 para la función  $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = |x|$  y para la función  $f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \sin(\pi x)$ .

**Ejercicio 7.** Encontrar una función del tipo  $2^{ax^3+bx^2+cx+d}$  que interpole la siguiente tabla de datos:

$x$	-1	0	1	2
$y$	1	1	0.5	4

**Ejercicio 8.** Utilizando `Octave`, encontrar y graficar una función del tipo  $e^{a_4x^4+a_3x^3+\dots+a_0}$  que interpole a la función  $f(x) = 1/x$  en 5 nodos equiespaciados en el intervalo  $[1, 10]$ .

**Ejercicio 9.** a) Escribir un programa que reciba como input dos vectores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , calcule la tabla de diferencias divididas correspondiente y devuelva el polinomio que interpola los datos  $\mathbf{y}$ , opcionalmente, la tabla de diferencias divididas.

b) Adaptar el programa anterior para que reciba, opcionalmente, como tercer parámetro una matriz  $\mathbf{A}$  que represente una tabla de diferencias divididas parcial. Esta variante debe tomar los datos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  y utilizarlos para completar la tabla  $\mathbf{A}$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x$ . Sea  $P_n$  un polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos distintos cualesquiera de dicho intervalo. Demostrar que para todo  $x \in [0, 5]$ ,

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32(5^{n+1})}{(n+1)!}$$

**Ejercicio 11.** Sea  $f$  una función  $C^\infty$  tal que para todo  $k \in \mathbb{N}$  y para todo  $x \in [a, b]$  se tiene:

$$|f^k(x)| \leq C^k k!$$

Mostrar que si  $0 < C < \frac{1}{b-a}$  y  $P_n$  es un polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos distintos, entonces  $P_n$  converge a  $f$  uniformemente, es decir,  $\|f - P_n\|_\infty \rightarrow 0$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{a+x}$ . Sean  $(x_n)_{n \geq 0}$  una sucesión arbitraria de puntos en  $[-1, 1]$  y  $P_n(x)$  el polinomio que interpola a  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Demostrar que si  $a > 3$  entonces  $P_n$  converge a  $f$  uniformemente.

**Ejercicio 13.** a) Dado el intervalo  $[a, b]$ , sea  $m$  el punto medio entre  $a$  y  $b$  y sea  $0 < h \leq (b-a)/2$ . Sea  $p = m - h$  y  $q = m + h$ . Demostrar que para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

b) Sean  $x_0 = a, \dots, x_i = x_0 + \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b$ ,  $n + 1$  puntos equiespaciados en el intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$|(x-x_0)\dots(x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

**Ejercicio 14.** Sea  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$ . Sea  $P_n$  un polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos equiespaciados en dicho intervalo. Demostrar que para todo  $x \in [-\pi, \pi]$

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!},$$

y concluir que  $P_n$  converge uniformemente a  $f$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(\pi x) + e^x$ . Sea  $P_n$  el polinomio de grado  $n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos equiespaciados.

- Usando el ejercicio 13, acotar el error  $\|f - P_n\|_\infty$ .
- Sea  $C_n$  la cota hallada en a). Para  $n = 1, 3, 5$ , graficar simultáneamente  $f$ ,  $f + C_n$ ,  $f - C_n$  y  $P_n$ .

**Ejercicio 16.** Dado un intervalo  $[a, b]$ , mostrar cómo tienen que estar distribuidos  $n + 1$  nodos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  en  $[a, b]$  de modo que exista  $x \in [a, b]$  tal que  $|(x - x_0) \dots (x - x_n)|$  sea del orden de  $(b - a)^{n+1}$ .

**Ejercicio 17.** a) Hallar  $n$  de modo que el polinomio  $P_n$  que interpola a la función  $f(x) = e^{2x}$  en los ceros de  $T_{n+1}$  verifique que  $\|f - P_n\|_\infty \leq 10^{-2}$  en  $[-1, 1]$ .

- Repetir el ítem anterior para  $f(x) = e^x$ ,  $x \in [0, 4]$ .

**Ejercicio 18.** Para  $n = 5, 10, 15$ ; graficar simultáneamente el polinomio  $W_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , donde  $x_i = -1 + 2i/n$ ;  $i = 0, \dots, n$  y el polinomio de Tchebychev  $T_{n+1}$ .

**Ejercicio 19.** Repetir los Ejercicios 5 y 6 usando los polinomios que interpolan a la función  $f$  en los ceros del polinomio de Tchebychev de grado  $n + 1$ , para  $n = 5, 10, 15$ .

**Ejercicio 20.** Utilizar el método de coeficientes indeterminados para hallar un polinomio  $p$  de grado 2 que satisfaga:

$$p(1) = 0, \quad p'(1) = 7, \quad p(2) = 10.$$

**Ejercicio 21.** Para ilustrar qué pasa cuando se desea interpolar no sólo una función sino también sus derivadas, consideramos el problema de hallar  $p$  de grado a lo sumo 3 que verifique:

- $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
- $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1;$
- $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

Usando el método de coeficientes indeterminados, demostrar que el problema (a) tiene solución única, el problema (b) no tiene solución, y el problema (c) tiene infinitas soluciones.

**Ejercicio 22.** Analizar para qué valores de  $x_0, x_1, x_2$ , y  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  existe un polinomio de grado 2 que satisfaga:

$$p(x_0) = \alpha_0, \quad p(x_1) = \alpha_1, \quad p'(x_2) = \alpha_2.$$

y cuándo este polinomio es único.

**Ejercicio 23.** a) Sea  $f(x) = \cos(\pi x)$ , hallar un polinomio de grado menor o igual que 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1).$$

- Hallar un polinomio de grado menor o igual que 4 que verifique las condiciones del ítem anterior, más la condición

$$p''(1) = f''(1).$$

**Ejercicio 24.** Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $f(x) = e^{2x-1}$  y sean  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  los ceros del polinomio de Tchebychev,  $T_{n+1}$ . Se interpola a  $f$  con un polinomio  $P$  de grado  $\leq n + 1$  de modo que  $P(x_0) = f(x_0)$ ,  $P(x_1) = f(x_1), \dots, P(x_n) = f(x_n)$  y además  $P'(x_n) = f'(x_n)$ . Probar que si  $n \geq 6$  entonces el error cometido en la interpolación sobre el intervalo  $[-1, 1]$  es menor que  $10^{-3}$ .

**Ejercicio 25.** Sea  $f \in C^2[a, b]$ , y sean  $x_0 = a, x_1 = a+h, \dots, x_n = b$ , donde  $h = (b-a)/n$ . Considerar la poligonal  $l(x)$  que interpola a  $f$  en los puntos  $x_i, i = 0 \dots n$ .

a) Probar que

$$|f(x) - l(x)| \leq \frac{h^2}{2} \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

b) Para los  $x \in [a, b]$  tales que  $l$  es derivable, probar que

$$|f'(x) - l'(x)| \leq h \max_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$