

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (M) - CÁLCULO NUMÉRICO
Curso de Verano 2016

Práctica N°4: Resolución de ecuaciones no lineales.

Ejercicio 1 Implementar un programa que reciba como input una función f , dos números a, b , y una tolerancia tol y aplique el método de bisección en forma iterativa para aproximar una raíz de f en el intervalo $[a, b]$, garantizando que el error cometido sea menor que tol .

Ejercicio 2 Implementar un programa que reciba como input una función f , dos números a, b , y una tolerancia tol y aplique el método de bisección en forma recursiva para aproximar una raíz de f en el intervalo $[a, b]$, garantizando que el error cometido sea menor que tol .

Ejercicio 3 Sea una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

1. Sea $(c_n)_n$ la sucesión de puntos medios obtenida mediante el método de bisección para f en $[a, b]$. Probar que $(c_n)_n$ converge a una raíz de f y mostrar una cota del error.
2. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ las sucesiones de ínfimos y supremos obtenidas mediante el método de bisección para f en $[a, b]$. Probar que ambas convergen a una raíz de f y mostrar una cota del error.

Ejercicio 4 Implementar un programa que reciba como input una función f , su derivada f' y un punto inicial x_0 y aplique el método de Newton-Raphson para buscar una raíz de f a partir de x_0 .

Ejercicio 5 Considerar la función $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$. Determinar para qué valores de x_0 la iteración N-R es convergente, para cuáles es divergente, y cuándo se obtienen ciclos periódicos.

Ejercicio 6 Demostrar que la ecuación

$$f(x) = e^x + 5 \sin x - 2 = 0$$

tiene una única raíz r en el intervalo $(0, \frac{3}{2})$. Encontrar un valor inicial en este intervalo de modo que el método N-R converja a r . Aplicar el método para hallar una aproximación de r .

Ejercicio 7 Sea una función suave f y sea a tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0$. Suponiendo que en $(a, b]$ f , f' y f'' son positivas, probar que la iteración de N-R generada a partir de $x_0 \in (a, b)$ converge decrecientemente hacia a .

Ejercicio 8 La ecuación $x^3 + \cos(x) + 7x = 0$ tiene una única raíz real.

1. Demostrar que el método de Newton-Raphson converge para todo valor inicial en $(-1, 0)$.
2. Demostrar que si $x_0 = -0.5$, el error n -ésimo es menor o igual que $\frac{12}{7}(\frac{7}{24})^{2^n}$.
3. Calcular cuántos pasos del método son necesarios para aproximar la solución con error menor o igual que 10^{-100} .

Ejercicio 9 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)e^x - 4$.

1. Probar que el método de Newton-Raphson es convergente para todo $x_0 > 1$.
2. Analizar la convergencia del método si se toma como valor inicial $x_0 = -3$.

Ejercicio 10

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con una única raíz r y tal que $f'(x) > \delta > 0$. Se desea aplicar el método de Newton Raphson para hallar r .

1. Probar que si $f(x) > f'(x)(x - r)$ para todo $x > r$ entonces se tiene que $x_1 < r$ para todo dato inicial $x_0 > r$.
2. Probar que si $f''(x) < 0$ para todo $x < r$, entonces el método genera una sucesión creciente que converge a r para todo $x_0 < r$. Concluir que si se cumplen ambas condiciones, el método converge.
3. Probar que Newton Raphson converge a la única raíz de $f(x) = -e^{-x} + 5x$ para todo dato inicial x_0 .

Ejercicio 11 Dada $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el método N-R generalizado consiste en realizar la iteración vectorial

$$x^{k+1} = x^k - (DF|_{x^k})^{-1} \cdot F(x^k),$$

donde $(DF|_{x^k})^{-1}$ es la inversa de la matriz diferencial de F evaluada en x^k . Usar la versión generalizada a varias variables del método N-R para resolver el sistema de ecuaciones

$$2x - 3y = 0, \quad x^2 - y^2 - 3 = 0$$

comenzando con valor inicial $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

Ejercicio 12 Implementar un programa en Octave para el método de Regula Falsi.

Ejercicio 13 Elegir un intervalo apropiado y utilizar los métodos de bisección y Regula Falsi para hallar una raíz positiva de la ecuación trascendente:

$$2x = \tan(x).$$

¿Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que 10^{-5} ?

Ejercicio 14 Implementar un programa que reciba como input una función f y dos puntos x_0 y x_1 y aplique el método de la secante para buscar una raíz de f con datos iniciales x_0 y x_1 .

Ejercicio 15 Aproximar $\sqrt[3]{2}$ utilizando el método de bisección con intervalo inicial $[1, 2]$, el método N-R, comenzando con $x_0 = 2$ y el método de la secante con $x_0 = 3$, $x_1 = 2$.

Ejercicio 16 Aproximar la solución positiva de la ecuación $\cos(x) = 2x$, comenzando con $x_0 = 0.5$ y utilizando la iteración de punto fijo $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cos(x_n)$. Graficar con `Octave` la sucesión obtenida.

Ejercicio 17 Sea $f(x) = x^3 - x - 1$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$. Se consideran las dos siguientes iteraciones del método de punto fijo para aproximar dicha raíz.

$$g(x) = x^3 - 1, \quad h(x) = \sqrt[3]{x + 1}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son apropiadas para la iteración, y para aquellas que lo sean:

1. Determinar un intervalo inicial I en el cual el método converja.
2. Dar un valor inicial $x_0 \in I$ y la cantidad de iteraciones necesarias para aproximar la raíz de f con error menor que 10^{-5} comenzando con el x_0 dado.

Ejercicio 18 Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{8x - 1}{x} - e^x$.

1. Determinar, mediante gráficos convenientes, el número de raíces de f , localizando cada una de ellas entre dos enteros consecutivos.
2. Se proponen los siguientes dos métodos de punto fijo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}(1 + x_n e^{x_n}), \quad x_{n+1} = \ln\left(\frac{8x_n - 1}{x_n}\right)$$

ambos con $x_0 = 1$. Estudiar si estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de f .

3. Implementar ambos métodos y utilizarlos para estimar las raíces de f .

Ejercicio 19 Sea g una función tal que g' es continua en $[s, b]$, donde s es un punto fijo de g . Si además se verifica que $0 \leq g'(x) \leq K < 1$ para todo $x \in [s, b]$, mostrar que la iteración, comenzando con $x_0 \in [s, b]$, converge decrecientemente a s .

Ejercicio 20 Sea una función f de clase C^1 en las condiciones del método N-R. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Mostrar que el método N-R es un método de punto fijo.

Ejercicio 21 Para una función f de clase C^2 que tiene una raíz de orden 2 en r :

1. Demostrar que el método N-R converge sólo linealmente a r (Sugerencia: Notar que en este caso la g del ejercicio anterior no está definida para $x = r$, redefinirla como $g(r) = r$, probar la diferenciabilidad de g y demostrar que $g'(r) \neq 0$).
2. ¿Cuál es el orden de convergencia de la siguiente modificación?

$$x_{n+1} = x_n - 2 \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ejercicio 22 Sea $f(x) = 4x^3 - 3x + 1 = 0$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz doble. Aproximarla calculando las 10 primeras iteraciones de los métodos N-R y N-R con la modificación del ejercicio 21, comenzando con los valores iniciales $x_1 = y_1 = 25$. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

Ejercicio 23 Dada la función $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$, $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, se construye el siguiente algoritmo para aproximar la raíz $r = 1$:

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$$

Verificar que si $x_0 > 1$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 1. Concluir que $x_n \rightarrow 1$, aunque esta iteración no está en las hipótesis del teorema del punto fijo. ¿Qué hipótesis no se cumple?

Ejercicio 24 Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x) = e^x - 2$. Calcular los 10 primeros términos de las sucesiones generadas por los métodos N-R y de la secante, comenzando con los valores iniciales $x_1 = 3$ para el primer método e $y_1 = 3, y_2 = 2.3$ para el segundo. Graficar simultáneamente las dos sucesiones obtenidas.

Ejercicio 25 Se quiere aplicar el método N-R para dar una tabla de valores de la función $y(x)$ definida implícitamente por la ecuación $G(x, y) = 0$ en un intervalo $[a, b]$.

El método consiste en comenzar la tabla en un par de valores x_0, y_0 que verifican $x_0 = a$ y $G(x_0, y_0) = 0$ y proceder por incrementos en x hasta llegar al valor $x_N = b$.

En cada paso se obtiene el valor de y_{n+1} aplicando el método N-R a la función $G(x_{n+1}, y)$ donde y es la variable y x_{n+1} permanece fijo; con valor inicial el valor de y_n obtenido en el paso anterior. Dado que la función $y(x)$ se supone continua, esta elección del valor inicial se supone apropiada.

1. Aplicar el método para la ecuación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, comenzando en $x_0 = 0, y_0 = 1$ para valores de x en $[0, 1]$. Graficar junto con la solución que se obtiene de despejar analíticamente y comparar. Utilizar distintos valores para el incremento y para la cantidad de iteraciones del método N-R en cada paso.
2. Aplicar el método para $G(x, y) = 3x^7 + 2y^5 - x^3 + y^3 - 3$. Comenzar la tabla en $x_0 = 0, y_0 = 1$ y proceder por incrementos en x de 0.2 hasta llegar a $x_{50} = 10$.