ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

ARIEL M. SALORT
asalort@dm.uba.ar
Marzo de 2016

1. Teoría general

Una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden puede ser escrita en la forma

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

donde $a_2 \neq 0, a_1, a_0$ y b son funciones continuas en algún intervalo I. Dividiendo todo por $a_2(x)$ (que es no idénticamente nula, porque sino la ecuación no sería de segundo orden) obtenemos la forma estándar

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x). \tag{1.1}$$

Cuando $g \equiv 0$ decimos que la ecuación es homogénea:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{1.2}$$

Por simplicidad definimos el operador diferencial $\mathcal{L} : C^2(I) \to C(I)$

$$\mathcal{L}[y] := y'' + py' + qy,$$

y escribimos la ecuación homogénea (1.2) como $\mathcal{L}[y] = 0$, y la no homogénea (1.1) como $\mathcal{L}[y] = g$. Observemos que el funcional $\mathcal{L}$ es lineal, es decir, si $y_1, y_2 \in C^2(I)$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ entonces $\mathcal{L}[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1\mathcal{L}[y_1] + c_2\mathcal{L}[y_2]$, lo cual es una consecuencia directa de la linealidad de la derivada.

Teorema 1.1 (Existencia y unicidad de solución)**.** *Sean $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el intervalo I,y $x_0 \in I$. Entonces para cualquier elección de los valores iniciales y_0 e y_1 existe una única solución $y(x)$ en el intervalo I del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Geométricamente nos dice que existe una única curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0) con pendiente y_1.

1.1. La ecuación homogénea.

El principio de superposición nos dice que si tenemos dos soluciones de la ecuación homogénea (1.2), entonces una combinación lineal de ellas también es solución. Esto es consecuancia directa de la linealidad del operador $\mathcal{L}$.

Teorema 1.2 (Principio de superposición)**.** *Si $\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[y_2] = 0$ y definimos $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes, entonces $\mathcal{L}[y] = 0$.*

Proof. Por la linealidad del operador $\mathcal{L}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](x) &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1\mathcal{L}[y_1](x) + c_2\mathcal{L}[y_2](x) = 0. \end{aligned}$$

□

El teorema de unicidad nos da la siguiente propiedad de las soluciones.

Teorema 1.3. *Sean y_1, y_2 dos soluciones de $\mathcal{L}[y] = 0$ tales que los vectores $(y_1(a), y_1'(a))$ y $(y_2(a), y_2'(a))$ sean linealmente independientes para algún a. Entonces toda solución de $\mathcal{L}[y] = 0$ es de la forma*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Proof. Por el principio de superposición y es solución de $\mathcal{L}[y]=0$. Entonces, dado $x=a$ existen $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ tales que

$$y(a)=c_1y_1(a)+c_2y_2(a),\qquad y'(a)=c_1y_1'(a)+c_2y_2'(a).$$

De hecho, utilizando por ejemplo la regla de Cramer, obtenemos que

$$c_1=\frac{(y(a)y_2'(a)-y_2(a)y'(a))}{y_1(a)y_2'(a)-y_2(a)y_1'(a)},\qquad c_2=\frac{(y_1(a)y'(a)-y(a)y_1'(a))}{y_1(a)y_2'(a)-y_2(a)y_1'(a)}.$$

Para tales constantes, la función

$$u(x)=y(x)-c_1y_1(x)-c_2y_2(x)$$

satisface la ecuación $\mathcal{L}[y]=0$, y por el principio de superposición cumple las condiciones iniciales $u(a)=u'(a)=0$. Entonces por el Teorema de unicidad obtenemos que $u\equiv 0$, de donde sigue el resultado. □

Definición 1.4. Dos soluciones y_1,y_2 de $\mathcal{L}[y]=0$ con la propiedad de que cualquier solución de $\mathcal{L}[y]=0$ se escriba como combinación de ellas, se llama *base de soluciones* de la ecuación homogénea $\mathcal{L}[y]=0$. El conjunto de funciones $\{y_1,y_2\}$ se dice *conjunto fundamental* de $\mathcal{L}[y]=0$.

Para saber si dos funciones son linealmente independientes se examina su Wronskiano.

Definición 1.5. El *Wronskiano* de dos funciones diferenciables y_1, y_2 se define como

$$W(y_1,y_2)(x)=det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado nos da una forma de saber si dos soluciones de $\mathcal{L}[y]=0$ son una base de soluciones de la ecuación homogénea.

Teorema 1.6. *Sean y_1,y_2 dos soluciones de $\mathcal{L}[y]=0$ en I. Son equivalentes*

(a) $\{y_1(x),y_2(x)\}$ *es un conjunto fundamental de soluciones de* $\mathcal{L}[y]=0$.
(b) $W(y_1,y_2)(x)\neq 0\quad \forall x\in I$.
(c) $W(y_1,y_2)(x_0)\neq 0$ *para algún* $x_0\in I$.

Proof. $(a)\Rightarrow(b)$. Lo probamos por contradicción. Supongamos que existe un $x_0\in I$ tal que $W(y_1,y_2)(x_0)=0$. Entonces, con el mismo razonamiento que en el Teorema 1.3, existen constantes c_1,c_2 no simultaneamente nulas tales que

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0,\qquad c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0,$$

o sea, el sistema tiene solución
Es decir, la función $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ es solución de $\mathcal{L}[y]=0$ con condiciones iniciales $y(x_0)=y'(x_0)=0$. La solución nula satisface lo mismo. Por lo tanto, por el teorema de unicidad, $y(x)\equiv 0$, por lo que

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0\quad\forall x\in I$$

con c_1,c_2 no simultaneamente nulas. Consecuentemente $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente dependientes, lo que contradice (a).
$(b)\Rightarrow(c)$ Es obvio.
$(c)\Rightarrow(a)$ Veamos que $\{y_1,y_2\}$ es linealmente independiente. Supongamos que existen constantes c_1,c_2 tales que

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0\quad\forall x\in I.$$

Entonces

$$y'(x)=c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=0\quad\forall x\in I.$$

En particular, para $x=a\in I$,

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0,\qquad c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0.$$

Como $W(y_1,y_2)(x_0)\neq 0$, el determinante del sistema de ecuaciones anteriores es no nulo, entonces debe ser $c_1=c_2=0$, de donde sigue que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes. □

Finalmente podemos caracterizar la base de soluciones de $\mathcal{L}[y]=0$ reescribiendo el Teorema 1.3.

Teorema 1.7 (Base de soluciones). *Si $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un conjunto de soluciones de $\mathcal{L}[y] = 0$ en I, que es además linealmente independiente, entonces cada solución de $\mathcal{L}[y] = 0$ en I es de la forma*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

para ciertas constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Proof. Sea $u(x)$ una solución de $\mathcal{L}[y] = 0$. Como $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un conjunto de funciones linealmente independiente tenemos que dado $x_0 \in I$, $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Entonces existen constantes c_1, c_2 no simultaneamente nulas tales que resuelven el sistema

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = u(x_0), \qquad c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = u(x_0).$$

Definamos $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Entonces $y(x)$ e $u(x)$ son soluciones de $\mathcal{L}[y] = 0$ y ambas satisfacen

$$y(x_0) = u(x_0), \qquad y'(x_0) = u'(x_0).$$

En consecuencia, el teorema de unicidad nos asegura que $u(x) = y(x) \quad \forall x \in I$, de donde sigue el resultado. □

1.1.1. *Método de reducción de orden.* Si conocemos inicialmente una solución $y_1(x)$ de la ecuación homogénea $\mathcal{L}[y](x) = 0$, queremos buscar otra solución de la forma $y_2(x) = w(x)y_1(x)$, que sea linealmente independiente con $y_1(x)$, donde $w(x)$ será una función a determinar.

Derivando obtenemos que

$$y_2' = w'y_1 + wy_1', \qquad y_2'' = w''y_1 + w'y_1' + w'y_1' + wy_1''.$$

Luego de reemplazar y_2 y sus derivadas en la ecuación homogénea tenemos que

$$w''y_1 + w'(2y_1'py_1) + w(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0$$

pero como $\mathcal{L}[y_1](x) = 0$ por ser y_1 solución del homogéneo, la expresión del paréntesis desaparece quedando

$$w''y_1 + w'(2y_1'py_1) = 0.$$

Esa expresión depende de las dos primeras derivadas de w (nunca queda dependiendo de w), por lo que, llamando $v = w'$ reducimos la ecuación de segundo orden a una de primer orden

$$v'y_1 + v(2y_1'py_1) = 0.$$

Esta nueva ecuación es de variables separables, podemos escribirla como

$$\frac{v'}{v} = -2\frac{y_1'}{y_1} - p,$$

de donde obtenemos que

$$v(x) = \frac{e^{-\int^x p(s)\,ds}}{y_1(x)^2},$$

y recordando que $v = w'$

$$w(x) = \int^x \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-\int^t p(s)\,ds}\,dt$$

y finalmente

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-\int^t p(s)\,ds}\,dt. \tag{1.3}$$

Observemos que si en las integrales hubieramos considerado las constantes de integración hubieramos obtenido una expresión similar de y_2, pero con un término extra de la forma $cy_1(x)$. Al escribir la solución general de la ecuación homogénea es indiferente tenerlo o no.

La solución y_2 satisface $\mathcal{L}[y_2] = 0$ y además es linealmente independiente con y_1. Se resume eso en el siguiente resultado.

Teorema 1.8. *Si y_1 es solución de $\mathcal{L}[y] = 0$ e y_2 es la construida en (1.3), tenemos que $\{y_1, y_2\}$ es linealmente independiente.*

Proof. Tenemos que

$$W(y_1,y_2)(x) = det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} y_1(x) & w(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & w'(x)y_1(x)+w(x)y_1'(x) \end{pmatrix}$$
$$= y_1^2(x)w'(x) = e^{-\int^x p(s)\,ds} > 0.$$

□

1.2. **La ecuación no homogénea.**

1.2.1. *Principio de superposición.* El principio de superposición surge de la linealidad del operador $\mathcal{L}$.

Teorema 1.9 (Principio de superposición)**.** *Si $\mathcal{L}[y_1] = g_1(x)$ y $\mathcal{L}[y_2] = g_2(x)$, entonces*

$$\mathcal{L}[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1g_1(x) + c_2g_2(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Proof. Por la linealidad del operador $\mathcal{L}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](x) &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2)\\ &= c_1\mathcal{L}[y_1](x) + c_2\mathcal{L}[y_2](x)\\ &= c_1g_1(x) + c_2g_2(x).\end{aligned}$$

□

En particular, si tenemos dos soluciones de la ecuación homogénea, combinaciones lineales de ellas también serán soluciones de la ecuación homogénea.

El siguiente resultado da la estructura de las soluciones de la ecuación no homogénea (1.1). Nos dice que todas las soluciones de (1.1) se pueden encontrar si conocemos una solución de (1.1) (llamada solución particular), y la solución general de la ecuación homogénea (1.2).

Teorema 1.10 (Soluciones de la ecuación no homogénea)**.** *Sea $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea $\mathcal{L}[y](x) = g(x)$ en el intervalo I, y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes en I de la ecuación homogénea $\mathcal{L}[y](x) = 0$. Entonces cada solución de $\mathcal{L}[y](x) = g(x)$ es de la forma*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes.

Proof. Sea $\varphi(x)$ una solución cualquiera de $\mathcal{L}[y](x) = g(x)$. Por el principio de superposición $\varphi(x) - y_p(x)$ es solución de $\mathcal{L}[y](x) = 0$. Por el teorema de representación de la solución de la ecuación homogénea tenemos que

$$\varphi(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

para ciertas constantes c_1, c_2, de donde sigue el resultado. □

Suponiendo que conocemos una base de soluciones de $\mathcal{L}[y](x) = 0$, vamos a construir una solución particular de la ecuación no homogénea $\mathcal{L}[y](x) = g(x)$. Vamos a proponer una solución particular de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

1.2.2. *Método de variación de los parámetros.* Asumiendo que conocemos una base de soluciones de la ecuación homogénea $\{y_1, y_2\}$ vamos a construir una solución particular de la ecuación no homogénea. Vamos a proponer una solución particular de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + x_2(x)y_2(x).$$

Para resolver imponemos la condición

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0,$$

con la cual obtenemos que

$$y_p' = c_1y_1' + c_2y_2', \qquad y_p'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'',$$

y reemplazando en $\mathcal{L}[y_p](x) = g(x)$ nos da

$$c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = g.$$

Los paréntesis que multiplican a c_1 y c_2 son cero por ser y_1, y_2 soluciones de la ecuación homogénea, de donde queda el siguiente sistema con incógnitas $c_1'(x), c_2'(x)$

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= g, \end{cases}$$

que puede ser resuelto, por ejemplo, utilizando la regla de Cramer. Obtenemos

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)g(x)}{W(x)}, \qquad c_2'(x) = -\frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}$$

donde $W(x) = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ es no nulo por ser $\{y_1, y_2\}$ base de soluciones. Integrando esas expresiones obtenemos que

$$c_1(x) = -\int^x \frac{y_2(s)g(s)}{W(s)}\, ds + k_1, \qquad c_2(x) = \int^x \frac{y_1(s)g(s)}{W(s)}\, ds + k_2$$

para ciertas constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ (podemos tomar ambas constantes como cero, ya que queremos una solución particular). Entonces, una solución particular de $\mathcal{L}[y](x) = g(x)$ está dada por

$$y_p(x) = \int^x \frac{y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)}{W(s)} g(s)\, ds. \tag{1.4}$$

2. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Buscamos la solución general de la ecuación

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x) \tag{2.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $g \in C$. Para ello, en virtud del Teorema 1.10, debemos encontrar una solución $y_h(x)$ de la ecuación homogénea, y luego una solución particular $y_p(x)$. En tal caso, la solución de (2.1) será

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

2.1. **Solución de la ecuación homogénea.** Consideramos ecuaciones del tipo

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \tag{2.2}$$

donde $a \neq 0$, b, c son constantes reales. El Teorema 1.1 nos asegura la existencia de soluciones definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Si encontramos dos soluciones linealmente independientes de (2.2), y_1, y_2, la solución general de (2.2) será de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. El problema es encontrar tales soluciones independientes. Ya que las derivadas de $y = e^{rx}$, r constante, son múltimos de si misma, probamos con esta función. Reemplazándola en (2.2) obtenemos

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como e^{rx} es siempre positivo debe ser

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.3}$$

Por lo tanto $y = e^{rx}$ es solución de (2.2) si y sólo si satisface (2.3), la que es llamada *ecuación característica* asociada a (2.2). Consecuentemente,

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.4}$$

Tendremos tres formas de la solución de (2.2) dependiendo del signo del discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$.

2.1.1. $\Delta > 0$**. Caso de raices reales distintas**. La solución de (2.2) será de la forma

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

Observamos que el Wronskiano de $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ en $x = 0$ es $r_2 - r_1 \neq 0$, lo que asegura la independencia lineal de ambas soluciones.

2.1.2. $\Delta = 0$**. Caso de raices reales repetidas**. Cuando las raíces son repetidas, i.e., $r = r_1 = r_2 = -b/2a$, solamente tenemos una solución no trivial $y_1 = e^{rx}$. Buscamos otra solución linealmente independiente Proponemos, para alguna $m(x)$ a determinar,

$$y_2(x) = m(x)y_1(x).$$

Reemplazándola en (2.2) obtenemos que

$$m''(ay_1) + m'(2ay_1' + by_1) + m(ay_1'' + by_1' + cy) = 0.$$

Como y_1 es solución de (2.2),

$$m''(ay_1) + m'(2ay_1' + by_1) = 0.$$

Recordando que $y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}$, sigue que $y_1'(x) = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}}$, de donde sigue

$$\begin{aligned} 0 &= w'(ay_1) + w(2ay_1' + by_1) \\ &= w'(ae^{-bx/2a}) + w(b-b)e^{-bx/2a} \\ &= w'(ae^{-bx/2a}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Siendo $ae^{-bx/2a} \neq 0$, nos queda $m''(x) = 0$, de donde, por ejemplo, $m(x) = x$. Consecuentemente $y_2(x) = xy_1(x)$. Observar que y_1 e y_2 son linealmente independientes ya que $W(y_1, y_2) \equiv 1$. Es así que la solución de (2.2) está dada por

$$y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

Observar el que método de reducción de orden funciona para obtener una solución no trivial a partir de una conodica también en ecuaciones con coeficientes variables.

2.1.3. $\Delta < 0$**. Caso de raices complejas conjugadas**. En este caso las raíces son de la forma

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

donde

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Como antes, queremos ver que $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$ son soluciones linealmente independientes de (2.2). De hecho lo son, pero en general estas soluciones podrían ser complejas y nosotros buscamos soluciones reales. Para ellos, recordemos el significado de la exponencial compleja: si θ es un número real la serie de Taylor de la exponencial está dada por

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\theta^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la forma de la expresión de Maclaurin de $\cos\theta$ y $\sin\theta$. La fórmula anterior es conocida como la *fórmula de Euler*. Consecuentemente,

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x + i\sin\beta x)$$

expresa la exponencial de números complejos en término de funciones reales. De manera similar, utilizando las expresiones del desarrollo de Taylor de e^x, $\cos x$ y $\sin x$ se obtiene que

$$\frac{d}{dx}e^{(\alpha+i\beta)x} = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x} = \frac{d}{dx}e^{\alpha x} + i\frac{d}{dx}e^{\beta x}.$$

En general cualquier función cumpleja con variable real x puede escribirse como

$$z(x) = u(x) + iv(x)$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones a valores reales. Las derivadas de z están dadas por

$$z'(x) = u'(x) + iv'(x), \qquad z''(x) = u''(x) + iv''(x).$$

Ahora, como $y(x) = e^{r_1 x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x := u(x) + iv(x)$ es una solución de (2.2), obtenemos que

$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0.$$

Una función complejo es nula si y sólo si su parte real e imaginaria son nulas, de donde sigue que u y v satisfacen (2.2). En consecuencia, tanto la parte real como la parte imaginaria de la solución compleja $y(x) = e^{r_1 x}$ son soluciones de (2.2).

Hemos obtenido que

$$y_h(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

2.2. **Solución particular.** Para encontrar una solución particular de (2.1) podemos utilizar el método de variación de los parámetros que nos proporciona la solución particular y_p dada en (1.4) , que es construida en término de la base de soluciones del homogéneo.

En ciertos casos podemos proponer la solución particular. Por ejemplo, si en (2.1) $g(x)$ es un polinomio de grado n, proponemos como solución particular

$$y_p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad a_i \in \mathbb{R},$$

e insertando esta expresión en (2.1) despejamos las constantes a_i.

Si $g(x)$ es el producto de un polinomio de grado n con una exponencial e^{rx}, $r \in \mathbb{R}$, proponemos como solución particular

$$y_p(x) = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)e^{rx}, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

En caso de que $g(x)$ sea el producto entre $\sin x$ (o $\cos x$) y un polinomio de grado n, proponemos como solución particular

$$y_p(x) = (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)\cos x + (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0)\sin x, \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

En particular, si $g(x) = \sin x$ ó $g(x) = \cos x$, proponemos $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$, con $A, B \in \mathbb{R}$.

3. Ecuaciones lineales con coeficientes variables

Dadas las funciones a, b, c y g dependientes de la variable x, buscamos la solución general de

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x). \tag{3.1}$$

El Teorema 1.10 nos dice que debemos encontrar una base de soluciones de la ecuación homogénea, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, y una solución particular $y_p(x)$. En tal caso, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$ será la solución buscada.

3.1. **Solución de la ecuación homogénea.** Supongamos que y_1 es solución de la ecuación

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{3.2}$$

Queremos encontrar otra solución y_2 que sea linealmente independiente con y_1. Para ello utilizamos el llamado método de reducción de orden. Proponemos

$$y_2(x) = m(x)y_1(x),$$

donde m es una función a determinar.

Calculamos y_2' e y_2'' y los introducimos en (3.2), obteniendo

$$m''y_1 + m'(2y_1' + ay_1) + m(y_1'' + ay_1' + by_1) = 0.$$

El paréntesis que multiplica a m es cero ya que y_1 es solución de (3.2). Reducimos el orden de la ecuación llamando $z(x) = m'(x)$, de donde obtenemos

$$z'y_1 + z(2y_1' + ay_1) = 0,$$

que es una ecuación de varaibles separables. Resolviendo obtenemos que

$$w(x) = exp\left(-\int^x \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\,dt - \int^x a(t)\,dt\right).$$

Sigue que

$$y_2(x) = y_1(x) exp\left(-\int^x \frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\,dt - \int^x a(t)\,dt\right).$$

Observar que y_1 y y_2 son linealmente independientes ya que

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)^2 w'(x) \neq 0.$$

3.2. **Solución particular.** Una vez encontrada la base de soluciones de la ecuación homogénea (3.2), una solución particular de (3.1) la podemos hallar utilizando el método de variación de las constantes. Idénticamente a lo hecho en (1.4), obtenemos que

$$y_p(x) = \int^x \frac{y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} g(s)\,ds.$$

es solución particular de (3.1).

3.3. **La ecuación de Cauchy-Euler.** Un caso particular de la ecuación (3.1) es la siguiente

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = g(x), \qquad x > 0 \tag{3.3}$$

donde $a \neq 0$, b y c son números reales. Para ello, realizando el cambio de variables $x = x(t) = e^t$ la vamos a reducir a una ecuación con coeficientes constantes. Obtenemos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = x\frac{dy}{dx}$$

y así,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}. \tag{3.4}$$

Derivando (3.4) respecto a t,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\ &= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\\ &= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}e^t\\ &= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}\end{aligned}$$

de donde

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \tag{3.5}$$

Reemplazando (3.4) y (3.5) en (3.3) obtenemos la siguiente ecuación con coeficientes constantes

$$ay''(t) + (b-a)y'(t) + cy(t) = g(e^t).$$

References

1. T. Apostol. *Calculus vol I,II.*
2. M. Braun. *Differential Equations and Their Applications.*
3. V. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations.*
4. G. Birkhoff, G.C. Rota. *Ordinary Differential Equations.*