

Se espera que los alumnos sepan y entiendan **todos** los enunciados de los temas vistos en las clases teóricas. El examen final podrá contener ejercicios prácticos y teórico-prácticos sobre todos los temas. Por otro lado, se podrá pedir que escriban las demostraciones de los teoremas y resultados que se listan a continuación.

1. Una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $P \in \mathbb{R}^2$ si y solo si para toda sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{R}^2 tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$, se verifica $\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = f(P)$.
2. Teorema de Bolzano: Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
3. Teorema de valores intermedios en conjuntos arcoconexos de \mathbb{R}^2 : Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ arcoconexo y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f(P) < d < f(Q)$ con $P, Q \in A$ y $d \in \mathbb{R}$, entonces existe $R \in A$ tal que $f(R) = d$.
4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P .
5. Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy en una variable.
6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en el abierto U . Probar que f es diferenciable en U .
7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Probar que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ y es igual a $\nabla f(P) \cdot v$.
8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f(P) \neq 0$. Probar que la dirección de máximo crecimiento de f está dada por $\nabla f(P)$.
9. Teorema del valor medio para funciones diferenciables en \mathbb{R}^2 : Sean $B \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y convexo y $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en B . Entonces para todo $P, Q \in B$, existe R en el segmento que une P con Q tal que $f(P) - f(Q) = \nabla f(R) \cdot (P - Q)$.
10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y P un extremo de f . Probar que $\nabla f(P) = 0$.
11. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 y P un punto crítico de f . Probar que si el hessiano de f en P es definido positivo, entonces P es un mínimo relativo estricto de f .
12. Teorema de multiplicadores de Lagrange: Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 , $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ y $P \in S$. Probar para $n = 2$ o $n = 3$ que si P es un extremo local de f restringido a S y $\nabla g(P) \neq 0$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.
13. Dado P en una curva de nivel de $F(x, y)$ de clase C^1 tal que $\nabla F(P) \neq 0$, entonces $\nabla F(P)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva en P .
14. Teorema fundamental del cálculo: Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.
15. Regla de Barrow: sea f continua en $[a, b]$, y F una primitiva, es decir $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, F es derivable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.
16. Teorema del valor medio integral: Dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a)$.
17. Integrabilidad de funciones continuas: Si f es continua en $[a, b]$ entonces es integrable en $[a, b]$.
18. Igualdad de derivadas parciales mixtas: Sea f una función de clase C^2 en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ y $P \in A$. Entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$.