Matemática I Biología - Verano 2023

PRIMER PARCIAL - 22/02/2023

Nombre: **L. U. Nº:**

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota

1. (a) Halle la forma binómica del siguiente número complejo:

$$z = \frac{(9-3\sqrt{3}i)^8}{(-5-5\sqrt{3}i)^5}.$$

   (b) Encuentre todos los números complejos z que satisfacen:

$$(2+2i)\cdot z = \mid 3-4i \mid \overline{z}^2.$$

   (Pista: Tal vez deba recordar diferencia de cuadrados.)

2. Una población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. El tamaño de esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 50 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 5 especímenes que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene a lo largo del tiempo.
Si se denota por $S_1(t)$ al tamaño de la población en el Sector 1 y $S_2(t)$ al tamaño de la población en el Sector 2 en el día t, la dinámica se puede representar en forma matricial de la siguiente forma: $\begin{pmatrix} S_1(t+1) \\ S_2(t+1) \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix}$,
donde $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/5 \\ 1/2 & 4/5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

   (a) Verifique que para todo $t \geq 0$, $\begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix} = M^t \cdot \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix}$.

   (b) Calcule $S_1(5)$ y $S_2(5)$.

   (c) Halle los estados de equilibrio del sistema (Pista: un estado de equilibrio del sistema es un vector v tal que $Mv = v$).

   (d) Verifique que $(S_1(t), S_2(t))$ tiende a un estado de equilibrio cuando $t \to \infty$. ¿Qué sucede para otras distribuciones de población iniciales?

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 3 + \sin(x)\sin(y)$.

   (a) Determinar la razón de cambio de f en el punto $P = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ en la dirección de P a Q, con $Q = \left(\frac{-2\sqrt{2}+\pi}{4}, \frac{2\sqrt{2}+\pi}{4}\right)$.

   (b) Si estamos parados en el punto $P = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. ¿En qué dirección la función $f(x)$ tiene el máximo crecimiento? ¿Cuál es la máxima razón de cambio en dicho punto?

4. Sea $f(x)$ tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 0$ viene dado por $P(x) = 1 - x + 2x^2$. Sea $g(x) = (f(x-2) + x + 1)^2$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 2$ de $g(x)$.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS