

## MATEMATICA 2 - Verano de 2025

### Práctica 7 - Espacios vectoriales con producto interno

**Ejercicio 1.** Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

- i)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$
- ii)  $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$
- iii)  $\Phi : K^2 \times K^2 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- iv)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 - x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_1$
- v)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + (1+i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2$
- vi)  $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Phi(x, y) = x_1\bar{y}_1 - ix_1\bar{y}_2 + ix_2\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$
- vii)  $\Phi : K^3 \times K^3 \rightarrow K$ ,  $\Phi(x, y) = 2x_1\bar{y}_1 + x_3\bar{y}_3 - x_1\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_1$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 2.** Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

- i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B^*)$ , con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$
- ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$
- iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle : K^n \times K^n \rightarrow K$ ,  $\langle x, y \rangle = x Q^* Q \bar{y}^t$ , donde  $Q \in K^{n \times n}$  es una matriz inversible, con  $K = \mathbb{R}$  y  $K = \mathbb{C}$

**Ejercicio 3.** Restringir el producto interno del ítem ii) del ejercicio anterior a  $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$  y calcular su matriz en la base  $B = \{1, X, \dots, X^n\}$ .

**Ejercicio 4.** En cada uno de los siguientes casos, hallar un producto interno en  $V$  para el cual la base  $B$  resulte ortonormal.

- i)  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $B = \{(1, i), (-1, i)\}$
- ii)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

**Ejercicio 5.**

- i) Encontrar una base de  $\mathbb{R}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el ítem iii) del Ejercicio 1 para  $K = \mathbb{R}$ .
- ii) Encontrar una base de  $\mathbb{C}^2$  que sea ortonormal para el producto interno definido en el ítem vi) del Ejercicio 1.

**Ejercicio 6.**

- i) Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de  $V$ :
  - (a)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$  para el producto interno canónico.
  - (b)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$  para el producto interno definido por  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$ .
  - (c)  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S = \langle (i, 1, 1), (-1, 0, i) \rangle$  para el producto interno canónico.
  - (d)  $V = \mathbb{C}^4$ ,  $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 / \begin{cases} x_1 + 2ix_2 - x_3 + (1+i)x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$  para el producto interno definido por  $\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3 + 3x_4\bar{y}_4$ .

- ii) Para cada uno de los subespacios del ítem anterior, hallar bases ortonormales para el producto interno considerado y definir explícitamente la proyección ortogonal sobre  $S$ .
- iii) Con los datos del ítem i) (d), hallar el punto de  $S$  más cercano a  $(0, 1, 1, 0)$  y calcular la distancia de  $(0, 1, 1, 0)$  a  $S$ .

**Ejercicio 7.**

- i) Se considera  $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x) dx$ .
- (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base  $\{1, X, X^2, X^3\}$ .
- (b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio  $S = \langle 1 \rangle$ .
- ii) Se considera  $C[-1, 1]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x).g(x) dx$ . Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función  $f(x) = \sin(\pi x)$ .
- Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio  $S = \langle 1, x, x^2, x^3, \sin(\pi x) \rangle$ .
- iii) Se considera  $C[0, \pi]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x).g(x) dx$ .
- (a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto  $B = \{1, \cos x, \sin x\}$ .
- (b) Sea  $S$  el subespacio de  $C[0, \pi]$  generado por  $B$ . Hallar el elemento de  $S$  más próximo a la función  $f(x) = x$ .

**Ejercicio 8.** Calcular  $f^*$  para cada una de las transformaciones lineales siguientes:

- i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$
- ii)  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + (1 - i)x_2, x_2 + (3 + 2i)x_3, x_1 + ix_2 + x_3)$
- iii)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  para  $B = \{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$
- iv)  $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}, f(p) = p'$ , con respecto al producto interno  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x).q(x) dx$ .
- v)  $f : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}, f(A) = P^{-1}.A.P$ , donde  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es inversible y  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A.B^*)$ .

(\*) **Ejercicio 9.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Probar que  $\text{Im}(f^*) = (\text{Nu}(f))^\perp$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $(V, \langle, \rangle)$  un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y sea  $S$  un subespacio de  $V$ . Probar que la proyección ortogonal  $P : V \rightarrow V$  sobre  $S$  es autoadjunta. Calcular sus autovalores.

**Ejercicio 11.**

- i) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz  $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal tal que  $O^t.A.O$  sea diagonal:

(a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$       (b)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$       (c)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

- ii) En cada uno de los siguientes casos, encontrar una matriz  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  unitaria tal que  $U^* . A . U$  sea diagonal:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & i & 0 \\ 1 & 3 & 2i & 1 \\ -i & -2i & 3 & i \\ 0 & 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 12.** Hallar la matriz en la base canónica de las siguientes transformaciones ortogonales:

- i)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{3}$ .
- ii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , simetría respecto de la recta de ecuación  $x_1 - x_2 = 0$
- iii)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , simetría respecto del plano de ecuación  $x_1 + x_2 - x_3 = 0$
- iv)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , rotación de ángulo  $\frac{\pi}{4}$  y eje  $\langle (1, 0, 1) \rangle$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Decidir si  $f$  es una rotación, una simetría o una composición de una rotación y una simetría. Encontrar la rotación, la simetría o ambas.

**Ejercicio 14.** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|f| = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Probar que  $f$  es una rotación. Hallar  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $g \circ g = f$ .

### (\*) Aplicación del producto interno y del determinante al cálculo de volúmenes

Consideremos  $\mathbb{R}^n$  con el producto interno canónico  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

El área del paralelogramo  $P(v_1, v_2)$  que definen dos vectores  $v_1$  y  $v_2$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  se puede calcular con la fórmula “base por altura”, o sea

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\|.$$

El volumen del paralelepípedo  $P(v_1, v_2, v_3)$  que definen tres vectores  $v_1, v_2, v_3$  linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  sería “área de la base por altura”, o sea

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\|.$$

Si esto se generaliza a  $k$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ , el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  sería

$$\|v_1\| \cdot \|p_{\langle v_1 \rangle^\perp}(v_2)\| \cdot \|p_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(v_3)\| \cdots \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|.$$

Se define entonces recursivamente el volumen del paralelepípedo  $P(v_1, \dots, v_k)$  definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  como:

$$\begin{cases} \text{vol}(P(v_1)) = \|v_1\| \\ \text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)) = \text{vol}(P(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\| \quad \text{para } k \geq 2. \end{cases}$$

Demostrando los ítems i), ii) y iii) siguientes, se prueba que el volumen del paralelepípedo definido por los vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_n$  en  $\mathbb{R}^n$  es igual a  $|\det(A)|$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .

Dados  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  se define la matriz  $G(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$  como

$$G(v_1, \dots, v_k)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle.$$

i) Probar que:

- $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = 0$ .
- $v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp \Rightarrow \det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|v_k\|^2$ .
- $\det(G(v_1, \dots, v_k)) = \det(G(v_1, \dots, v_{k-1})) \cdot \|p_{\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle^\perp}(v_k)\|^2$ .

ii) Probar que, si  $v_1, \dots, v_k$  son vectores linealmente independientes,

$$(\text{vol}(P(v_1, \dots, v_k)))^2 = \det(G(v_1, \dots, v_k)).$$

iii) Sean  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  linealmente independientes y sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, \dots, v_n$ .

- Probar que  $G(v_1, \dots, v_n) = A^t \cdot A$ .
- Deducir que  $\text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(A)|$ .

iv) a) Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores  $(2, 1)$  y  $(-4, 5)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

b) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por  $(1, 1, 3)$ ,  $(1, 2, -1)$  y  $(1, 4, 1)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

v) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un isomorfismo. Probar que, si  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  son linealmente independientes, entonces

$$\text{vol}(P(f(v_1), \dots, f(v_n))) = |\det f| \cdot \text{vol}(P(v_1, \dots, v_n)).$$