

MATEMATICA 2 - Verano de 2025
Práctica 6 - Forma de Jordan

Ejercicio 1. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ una matriz nilpotente tal que $A^5 \neq 0$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

Ejercicio 3. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}.$$

Ejercicio 4.

- i) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{16 \times 16}$ tal que $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad iv) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ii) \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$iii) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x e^x, x^2 e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $\delta : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ .

Ejercicio 7. Para cada $a \in \mathbb{R}$, hallar la forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ una matriz con autovalores λ_1 , λ_2 y λ_3 y que cumple:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_1 I)^4 &= 10 \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^2 &= 11, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^3 &= 10, & \operatorname{rg}(A - \lambda_2 I)^4 &= 9, \\ \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I) &= 13, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^2 &= 12, & \operatorname{rg}(A - \lambda_3 I)^3 &= 11. \end{aligned}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 9. Encontrar subespacios de dimensión 1, 2 y 3 que sean A -invariantes para

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 12. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, & a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n & \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 13. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

(*) **Ejercicio 14.** Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Calcular e^{At} para $t \in \mathbb{R}$.

ii) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 2$.