MATEMATICA 2 - Verano de 2025
Práctica 3 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ 2x_2,\ 1 + x_1)$

ii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \ f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial).

iii) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.\,a_{22} - a_{12}.\,a_{21}$

iv) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ \ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

v) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^3,\ \ f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

i) $tr : K^{n\times n} \to K,\ tr(A) = \sum\limits_{1\le i\le n} a_{ii}$ para $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$

ii) $t : K^{n\times m} \to K^{m\times n},\ \ t(A) = A^t$

iii) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m},\ \ f(A) = B.A$ donde $B \in K^{r\times n}$

iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \ \delta(f) = f'$

v) $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1]),\ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

vi) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K,\ \ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

Ejercicio 3.

i) Mostrar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.

ii) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$, $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

iii) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)$, $f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$.

Ejercicio 4.

i) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales del Ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

ii) Clasificar las transformaciones lineales tr, t y ϵ_α del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 5. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 6.

i) En cada uno de los siguientes casos probar que no existe una transformación lineal que verifique las condiciones pedidas.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1,0,1,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\} \subseteq \mathrm{Im}(f)$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ epimorfismo
(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ monomorfismo
(d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ isomorfismo tal que $f(S) = T$, siendo S y $T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid 2x_1+x_4 = 0,\ x_2-x_3 = 0\}$.

ii) Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

(a) $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$, $T = \langle(1,2,1)\rangle$
(b) $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\}$, $T = \langle(1,-2,1)\rangle$

(∗) **Ejercicio 7.** Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar que:

i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$
ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$
iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$
iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos definir una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

i) $(1,1,0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$
ii) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \langle(1,1,2)\rangle$
iii) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
iv) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$
v) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$
vi) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

Ejercicio 9. Sea V un K-espacio vectorial. Una transformación lineal $f : V \to V$ se llama un *proyector* si y sólo si $f \circ f = f$.

i) Probar que $f : V \to V$ es un proyector $\iff f(v) = v \quad \forall\, v \in \mathrm{Im}(f)$.
ii) En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido.

(a) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
(b) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(-2,1,1)\rangle$
(c) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1,x_2,x_3) \mid 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1,1,1)\rangle$

iii) Sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que:

(a) $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$
(b) $g = id_V - f$ es un proyector con $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Nu}(f)$

iv) Probar que si S y T son subespacios de un K-espacio vectorial V de dimensión n tales que $V = S \oplus T$, existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$.

Ejercicio 10. Dada $f : V \to V$, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_2 + x_3,\ 5x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + 3x_2 + 4x_3)$

(a) $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
(b) $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.

ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - ix_2,\ x_1 + x_2)$

(a) $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
(b) $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

iii) $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$, $f(P) = P'$

(a) $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
(b) $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $f(A) = A^t$, $B = B' = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$.

Ejercicio 11. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Calcular $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

ii) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

Ejercicio 12.

i) En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifique lo pedido.

(a) $A \neq I_3$ y $A^3 = I_3$
(b) $A \neq 0$, $A \neq I_3$ y $A^2 = A$

ii) Hallar matrices no nulas $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que:

(a) $A.B = 0$ y $B.A \neq 0$
(b) $A.B = 0$ y $B.A = 0$

Ejercicio 13. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j;\ \ i \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3)$.

i) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices inversibles C y D tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Calcular el rango de las siguientes matrices:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$ para cada $k \in \mathbb{R}$

$(*)$ **Ejercicio 16.**

i) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A.B) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A.B) \leq \mathrm{rg}(B)$.

ii) Sean $A, B \in K^{m\times n}$. Probar que $\mathrm{rg}(A + B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

Ejercicio 17.

i) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in K^n \mid A.x = 0\}$. Probar que $\mathrm{rg}(A) + \dim(S) = n$.
(Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes).

ii) Sean $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $A.x = b$ y sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada.
Probar que $A.x = b$ tiene solución $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b)$.