MATEMATICA 2 - Verano de 2025

Práctica 1 - Repaso de sistemas de ecuaciones lineales y matrices

A lo largo de esta práctica, K simbolizará el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos, indistintamente.

Ejercicio 1. Resolver sobre $K = \mathbb{R}$ los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{C}$?

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\text{iii)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\text{iv)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = & 6 \end{array} \right.$$

$$\text{v)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{vi)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

($*$) **Ejercicio 2.** Sea H un sistema lineal no homogéneo y sea p una solución de H. Sea H_0 el sistema lineal homogéneo asociado a H. Probar que si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_0$ son los conjuntos de soluciones de H y H_0 respectivamente, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + p = \{s + p \mid s \in \mathcal{S}_0\}$.

Ejercicio 3. Resolver el siguiente sistema lineal en $\mathbb{C}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\,x_1 - (1+i)x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 4. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales homogéneos, determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene alguna solución no trivial:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ (k+1)x_2 + x_3 & = & 0 \\ (k^2-4)x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 5. Determinar los valores de α_1, α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & \alpha_3 \end{array} \right.$$

Ejercicio 6. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ cada uno de los siguientes sistemas tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$$\text{i)} \left\{ \begin{array}{rcl} ax_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\text{ii)} \left\{ \begin{array}{rcl} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = & -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = & b \end{array} \right.$$

Ejercicio 7. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

$(*)$ **Ejercicio 8.**

i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{3\times 3} \mid A.B = B.\,A \;\; \forall\, B \in K^{3\times 3}\}$.

Ejercicio 9.

i) Exhibir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A^2 = -I$.

ii) Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones $\forall\, n \geq 2$:

(a) $(A.B)^2 = A^2B^2$

(b) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

(c) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \Rightarrow B = C$

(d) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$

(e) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

(f) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

iii) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que:

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

Ejercicio 10. Probar que si A, $B \in K^{m\times n}$ y $A.x = B.x \;\forall\, x \in K^n$, entonces $A = B$.

Ejercicio 11. Decidir si las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12. Sea $A \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y sean B, $C \in K^{n\times m}$. Probar:

i) $A.B = A.C \;\Rightarrow\; B = C$

ii) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$

Ejercicio 13. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices A, $B \in K^{n\times n}$. Justificar:

i) A, B inversibles $\Rightarrow A + B$ inversible

ii) A inversible $\iff$ A^t inversible

Definición: Dada $A \in K^{n\times n}$, se llama *matriz transpuesta de* A a la matriz $A^t \in K^{n\times n}$ que cumple que $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

iii) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}$ / $A^j = 0$) $\Rightarrow A$ no es inversible.

$(*)$ **Ejercicio 14.** Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$. Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única si y sólo si A es inversible.