Normas y condicionamiento de una matriz

Juan Pablo De Rasis

8 de febrero de 2018

1 Resultados teóricos

Recordemos que, dado $n \in \mathbb{N}$ y dada una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tenemos una norma asociada en el espacio de matrices (que, por simplicidad, notamos también $\|\cdot\|$) que, para cada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, satisface

$$\|A\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|<1}} \|Ax\|$$

A modo de ejemplo, si $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denota la matriz identidad, entonces cualquiera sea la norma $\|\cdot\|$ definida en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|I\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ix\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|x\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} 1 = 1$$

Sabemos además que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$. Más aún, se tiene la siguiente propiedad:

Proposición 1.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\|A\|$ es el elemento mínimo del conjunto*

$$S := \{C \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ (\|Ax\| \leq C \|x\|)\}$$

Demostración. Como $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces $\|A\| \in S$. Veamos que es su elemento mínimo. En efecto, dado $C \in S$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo se tiene que

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$$

Tomando máximo en los posibles valores de x se tiene $\|A\| \leq C$, como queríamos. ■

Esta caracterización de la norma nos provee de un corolario útil.

Corolario 1.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sean A y B dos matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.*

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\|ABx\| = \left\| A \underbrace{(Bx)}_{\in\mathbb{R}^n} \right\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

Como el escalar $C := \|A\| \|B\|$ cumple que $\|(AB)\, x\| \leq C \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la Proposición 1.1 nos dice que $\|AB\| \leq C = \|A\| \|B\|$. ■

Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos definidas las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in [1,n] \cap \mathbb{N}} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Estas normas, dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cumplen

$$\|A\|_1 = \max_{j \in [1,n] \cap \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{i \in [1,n] \cap \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho\left(A^t A\right)}$$

donde ρ denota el *radio espectral* de una matriz.

Recordemos que, fijados $n \in \mathbb{N}$ y una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, el *condicionamiento* de una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define como $\mathfrak{N}(A) := \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$. A modo de observación, del Corolario 1.2 y el hecho de que la norma de la matriz identidad es igual a 1, obtenemos $1 = \|I\| = \left\|AA^{-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| = \mathfrak{N}(A)$.

Teorema 1.3 *Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible. Entonces*

$$\mathfrak{N}(A) \geq \sup_{\substack{B \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B \text{ singular}}} \frac{\|A\|}{\|A - B\|}$$

Demostración. Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singular. Entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo tal que $Bx = 0$. Luego

$$0 < \|x\| = \left\|A^{-1}(Ax)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Ax\| = \left\|A^{-1}\right\| \|(A - B)x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A - B\| \|x\|$$

Multiplicando la desigualdad $\|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A - B\| \|x\|$ por $\frac{\|A\|}{\|x\|\|A-B\|}$, lo cual es posible dado que $x \neq 0$ y $A - B \neq 0$ (pues A es inversible y B no lo es), obtenemos

$$\frac{\|A\|}{\|A - B\|} \leq \mathfrak{N}(A)$$

Como esta desigualdad la probamos cualquiera sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singular, tomando supremo en dichos valores de B obtenemos la desigualdad buscada. ■

En el Teorema 1.3 vale, de hecho, la igualdad, aunque la demostración para una norma en general excede nuestros objetivos. Sin embargo, esta versión es suficiente para obtener interesantes aplicaciones.

2 Ejemplos y aplicaciones

Ejemplo 2.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que existen dos matrices inversibles $S, T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $A = ST$.*

Se desea resolver el sistema $Ax = b$. El dato b no es conocido de manera exacta, sino que se tiene una aproximación $\widetilde{b}$, lo que conduce a una solución $\widetilde{x}$. Se sabe que $b \neq 0$. Probar que $x \neq 0$ y que

$$\frac{\|x - \widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \mathfrak{N}(S)\, \mathfrak{N}(T) \frac{\left\|b - \widetilde{b}\right\|}{\|b\|}$$

Solución. Si fuera $x = 0$ entonces $0 = Ax = b$, contrario a nuestras hipótesis.

Como $b = Ax = STx$ y $\widetilde{b} = A\widetilde{x} = ST\widetilde{x}$ entonces $ST(x - \widetilde{x}) = b - \widetilde{b}$, de donde $x - \widetilde{x} = T^{-1}S^{-1}\left(b - \widetilde{b}\right)$. Tomando norma y usando el Corolario 1.2, se tiene

$$\|x - \widetilde{x}\| = \left\|T^{-1}S^{-1}\left(b - \widetilde{b}\right)\right\| \leq \left\|T^{-1}S^{-1}\right\| \left\|b - \widetilde{b}\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \left\|S^{-1}\right\| \left\|b - \widetilde{b}\right\| \frac{\|b\|}{\|b\|} =$$

$$= \frac{\left\|T^{-1}\right\| \left\|S^{-1}\right\| \left\|b - \widetilde{b}\right\|}{\|b\|} \|STx\| \leq \frac{\left\|T^{-1}\right\| \left\|S^{-1}\right\| \left\|b - \widetilde{b}\right\|}{\|b\|} \|S\| \|T\| \|x\| =$$

$$= \mathfrak{N}(S)\,\mathfrak{N}(T) \frac{\left\|b - \widetilde{b}\right\|}{\|b\|} \|x\|$$

de donde, dividiendo por $\|x\| \neq 0$, obtenemos la desigualdad buscada. ■

Ejemplo 2.2 *Consideramos* $\|\cdot\|_\infty$ *en* $\mathbb{R}^3$. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Probar que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \mathfrak{N}(A) = +\infty$.

Solución. Como estamos analizando $\varepsilon \to 0^+$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces $\|A\|_\infty = 3$. Consideramos la matriz singular

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Como $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $\|A - B\|_\infty = \varepsilon + \varepsilon^2$. Por el Teorema 1.3 tenemos que

$$\mathfrak{N}(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\|A - B\|_\infty} = \frac{3}{\varepsilon + \varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\to} +\infty$$

lo cual prueba lo que queríamos. ■

Ejemplo 2.3 *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Consideramos en* $\mathbb{R}^n$ *la norma* $\|\cdot\|_\infty$ *y definimos* $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$(H_n)_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}$$

Probar que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathfrak{N}(H_n) = +\infty$.

Solución. Es claro que

$$\|H_n\|_\infty = \max_{i \in [1,n] \cap \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \left|(H_n)_{ij}\right| = \max_{i \in [1,n] \cap \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i + j - 1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + j - 1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

Sea $B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz dada por

$$(B_n)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+j-1}, & j \neq 1 \\ 0, & j = 1 \end{cases}$$

En otras palabras, B_n resulta de reemplazar todas las entradas de la primera columna de la matriz H_n por 0. Es claro que B_n es singular, pues su primera columna es nula. Más aún, $H_n - B_n$ satisface

$$(H_n - B_n)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}, & j = 1 \\ 0, & j > 1 \end{cases}$$

Es decir,

$$H_n - B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que $\|H_n - B_n\|_\infty = 1$. De esta forma, por el Teorema 1.3, se tiene

$$\mathfrak{N}(H_n) \geq \frac{\|H_n\|_\infty}{\|H_n - B_n\|_\infty} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

y como es conocido que la serie armónica diverge, hemos probado lo que queríamos. ■