

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2025

Práctica 4 - Teorema de Stokes y Teorema de Gauss.

Repaso:

Teorema 1 (Campos Conservativos). Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio simplemente conexo y $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) \mathbf{F} es **conservativo**: $\exists \phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \phi$
- (b) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada $C \subset D$
- (c) La integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente del camino** en D
- (d) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todo D (campo irrotacional)

Teorema 2 (Stokes). Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable, suave y compacta con borde ∂S suave a trozos, orientada positivamente. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno abierto U que contiene a S . Entonces:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Teorema 3 (Gauss). Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ un sólido compacto con frontera ∂E suave por partes y orientable. Sea $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno abierto U que contiene a E . Entonces:

$$\oint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$$

Ejercicios:

Ejercicio 1. Verificar el teorema de Stokes para el hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

Ejercicio 2. Sea S la superficie cilíndrica con tapa, que es unión de dos superficies S_1 y S_2 , donde S_1 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ y S_2 es el conjunto de (x, y, z) con $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geq 1$, orientadas con la normal que apunta hacia afuera del cilindro y de la esfera, respectivamente. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

Ejercicio 3.

- a). Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S . Describir, mediante dibujos, como deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

- b). Deducir que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(una superficie cerrada es aquella que constituye la frontera de una región en el espacio; así, por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada).

c). Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, y $\mathbf{F} = (\sin xy, e^x, -yz)$.

Ejercicio 4. Estudiar la aplicabilidad del teorema de Stokes al campo $\mathbf{F} = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ y la superficie S , en cada uno de los siguientes casos:

- $S =$ círculo de radio $a > 0$ centrado en el origen en el plano $z = 0$.
- $S =$ región del plano $z = 0$ entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y = 1$.

Ejercicio 5. Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde

- $\mathbf{F} = (2xyz + \sin x, x^2z, x^2y)$, y C es la curva que está parametrizada por $(\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- $\mathbf{F} = (\cos xy^2 - xy^2 \sin xy^2, -2x^2y \sin xy^2, 0)$, y C es la curva parametrizada por $(e^t, e^{t+1}, 0)$, $-1 \leq t \leq 0$.

Ejercicio 6. Calcular

$$\int_C (y + \sin x) dx + \left(\frac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3 dz,$$

donde C es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: Observar que C se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

Ejercicio 7. Sea $f \in C^1(B)$ donde B es una bola en \mathbb{R}^3 . Deducir que si $\nabla f = 0$ en B se sigue que f es constante en B .

Ejercicio 8. Calcular la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde \mathbf{F} es el campo vectorial definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$

y C es la curva que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al polo norte.

Ejercicio 9. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (0, 0, a^2 - x^2 - y^2)$ a través de las siguientes secciones oblicuas del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$:

- Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $y + z = 1$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 1)$ apunte en la dirección $(0, 1, 1)$.
- Sección oblicua determinada por la intersección del cilindro con el plano de ecuación $z = 0$, de modo que la normal en el punto $(0, 0, 0)$ apunte en la dirección $(0, 0, 1)$.

¿Depende el flujo del área de la sección?. Justifique.

Ejercicio 10. Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2-2x}$ podemos describir la superficie de la calabaza de un mate como la superficie de rotación alrededor del eje z de la curva $x = f(z)$, $0 \leq z \leq 1$.

Para una idea gráfica ver la figura.

Cuando el mate se encuentra cargado de yerba y de agua caliente, el calor es un campo dado por

$$F(x, y, z) = \left(x, y, z - \frac{1}{2}\right)$$

Calcular el flujo térmico saliente que atraviesa la superficie de la calabaza del mate.

Ejercicio 11. Sea S la superficie dada por el gráfico de la función $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ con

$\|(x, y)\| \leq 1$ y sea $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{zx}{x^2+y^2}, \frac{zy}{x^2+y^2}, 0\right)$. Hallar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Piense antes de actuar.

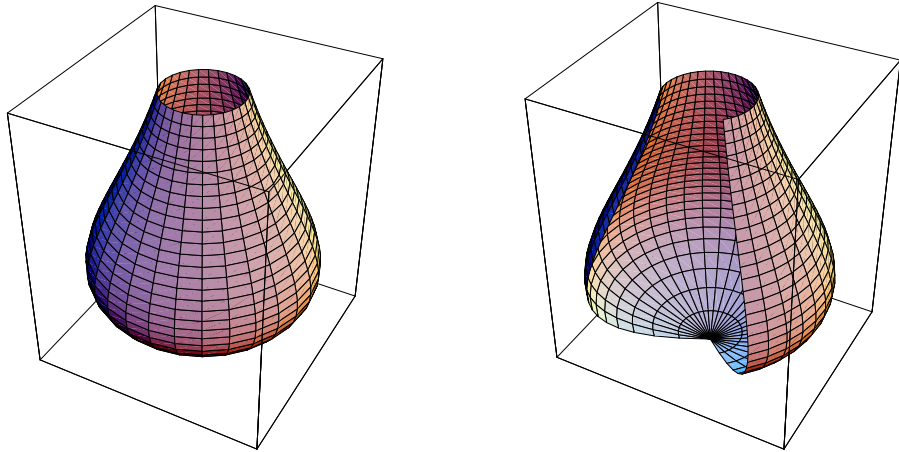


FIGURE 1

Ejercicio 12. Se sabe que $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{G} = 0$ para todo campo vectorial $\mathbf{G} \in C^1$. Además, si $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ en \mathbb{R}^3 , existe $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$. Por ejemplo, tomar

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt,$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z F_1(x, y, t) dt,$$

$$G_3(x, y, z) = 0.$$

Considerar el campo gravitatorio $\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Verificar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. ¿Existe un campo $\mathbf{G} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$?

Ejercicio 13. ¿Es cada uno de los siguientes campos vectoriales el rotor de algún otro campo vectorial? De ser así, hallar el campo vectorial.

a). $\mathbf{F} = (x, y, z)$.

b). $\mathbf{F} = (x^2 + 1, x - 2xy, y)$.

Ejercicio 14. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz - x \cos z, -yz + y \cos z, 4 - x^2 - y^2).$$

Determinar R de modo que el flujo del campo \mathbf{F} a través de S_R sea máximo.

Ejercicio 15. Usando el teorema de Gauss, probar las *Identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy dz,$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz.$$

Aquí \mathbf{n} es la normal exterior al dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, f, g son de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y, para una función $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

Ejercicio 16. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor del operador Δ definido en el Ejercicio 25 en Ω si existe una función $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $f = 0$ en $\partial\Omega$, $f \not\equiv 0$ tal que $\Delta f = \lambda f$ en Ω . En ese caso decimos que f es una autofunción asociada a λ .

Demostrar que si $\lambda \neq \mu$ son autovalores de Δ en Ω y f y g son autofunciones asociadas a λ y μ respectivamente se tiene

$$\iiint_{\Omega} f g dV = 0$$

Ejercicio 17. Sea B una bola en \mathbb{R}^3 . Ver que no puede haber una función $f \neq 0$, $f \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ que satisfaga

$$\Delta f = 0 \quad \text{en } B, \quad f = 0 \quad \text{en } \partial B.$$