

Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2025

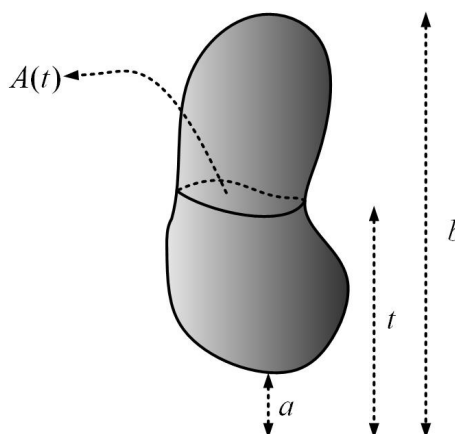
Práctica 0 - Repaso de integración y cambio de variables.

1. PRINCIPIO DE CAVALIERI.

Ejercicio 1. Considerar un cuerpo que ocupa una región Ω en el espacio comprendida entre los planos $z = a$ y $z = \ell$. Deduzca que el volumen del cuerpo se puede calcular como

$$V = \int_a^\ell A(t) dt,$$

donde $A(t)$ es el área de la sección del cuerpo obtenido al intersecarlo con el plano $z = t$.



Ejercicio 2. Calcular el volumen de una región cilíndrica. Verificar que la fórmula resultante coincide con la fórmula empírica *superficie de la base por altura*.

Ejercicio 3. Calcular el volumen de la región encerrada por el paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2$.

2. FUBINI.

Ejercicio 4. Enunciar el Teorema de Fubini.

Ejercicio 5. Sea R el rectángulo $R = [-1; 1] \times [0; 1]$. Evaluar las siguientes integrales dobles:

(a) $\iint_R x^2 y \, dA,$

(b) $\iint_R x \cos(xy) \, dA,$

(c) $\iint_R \frac{xy}{1+x^2} \, dA,$

(d) $\iint_R \frac{y^n}{(1-\frac{x^2}{4})^{-\frac{1}{2}}} \, dA.$

Ejercicio 6. Sea R el rectángulo arbitrario $[a; b] \times [c; d]$. Expresar mediante integrales simples la integral doble $\iint_R F(x, y) \, dA$ cuando $F(x, y)$ está dada por

(a) $F(x, y) = f(x)g(y).$

(b) $F(x, y) = f(x) + g(y).$

3. DESCRIPCIÓN DE REGIONES.

Ejercicio 7. Sea T el triángulo de vértices $(0; 0)$, $(2; 3)$ y $(3; 5)$. Describirlo como una región de tipo 1. Describirlo como una región de tipo 2. Hallar el área.

Ejercicio 8. Para cada una de las siguientes descripciones, graficar la región correspondiente y calcular el área respectiva.

- (a) $-1 \leq x \leq 1 + y$; $-1 \leq y \leq 1$,
- (b) $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$; $0 \leq x \leq 1$,

Ejercicio 9. Sea \mathcal{P} la pirámide cuyos vértices son $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ y $(0; 0; 1)$. Describirla analíticamente. Hallar el volumen.

4. APLICACIONES DE LA INTEGRAL.

Recuerdo: El valor medio de una función escalar $f(x)$ en una región $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como:

$$M.V(f) = \frac{1}{\text{Vol}(D)} \int_D f(x) dx,$$

si una región D tiene una densidad $\rho(x)$ que varía en el espacio, la masa M de la región se puede calcular integrando la densidad sobre D . Esto se expresa como:

$$M = \int_D \rho(x) dx.$$

Ejercicio 10. *Valor medio:* hallar el valor medio de la función $f(x, y) = x^2y$ en la región triangular de vértices $(1; 1)$; $(2; 0)$ y $(0; 1)$.

Ejercicio 11. *Masa:* hallar la masa de la región esférica $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ sabiendo que la densidad de masa es proporcional a la componente z , digamos $\rho = \lambda z$.

5. CAMBIO DE VARIABLES.

Ejercicio 12. Enunciar el Teorema de Cambio de Variable.

Ejercicio 13. Sean $T(u, v) = T(x(u, v), y(u, v)) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Sea D^* el rectángulo $[0, 3] \times [1, 3]$.

- (a) Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es biyectiva T ? Observar que D es un paralelogramo y hallar su área.
- (b) Describir el área de D en términos de una integral sobre D^* . Indicar que función hay que integrar y que relación tiene con T .

Ejercicio 14. Sea D el paralelogramo de vértices $(1, 2)$, $(5, 3)$, $(2, 5)$, $(6, 6)$. Calcular

- (a) $\int_D xy dx dy$
- (b) $\int_D (x - y) dx dy$

Ejercicio 15. Sean $D^* = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y P la transformación de coordenadas polares a cartesianas, es decir, $P(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- (a) Demostrar que $P(D^*) = D$. ¿Es biyectiva P ?
- (b) ¿En qué transforma P el rectángulo $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta \theta]$?
- (c) Calcular la matriz $DP(r, \theta)$. ¿En qué transforma la aplicación dada por esta matriz al rectángulo dado en b)? ¿Y en el caso $r = 0$?

Ejercicio 16. Sean $D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$ y P la transformación del ejercicio anterior.

- (a) Hallar $D = P(D_1)$.
- (b) Calcular $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$ y $\int_{D_1} r^2 J dr d\theta$ siendo J el jacobiano de la transformación polar. ¿Dan igual las dos integrales? ¿Por qué?

Ejercicio 17. Hallar el área acotada por la curva dada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$. Esta curva se llama lemniscata.

Ejercicio 18. Sea B la región sobre el plano xy dentro del cilindro dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y debajo del cono dado por $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

- (a) Describir B por ecuaciones.
- (b) Calcular $\int_B z \, dx \, dy \, dz$

Ejercicio 19. Sea $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1\}$.

- (a) Dibujar E y hallar su volumen. ¿Qué es E ?
- (b) Calcular $\int_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] \, dx \, dy \, dz$.

Ejercicio 20. Sea R la región del primer cuadrante acotada por las hipérbolas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, y las rectas $y = \frac{x}{3}$, $y = 5x$. Calcular

$$\iint_R (x^2 - y^2) \, dA.$$

Ejercicio 21. Sea $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x, y) = f(y, x) \forall x, y \in [0, 1]$. Probar que:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y) \, dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_{[0,1]^2} f(x, y) \, dx \, dy.$$