Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2025

Práctica 3 - Teorema de Green.

Repaso:

Definición 1. Una **región** D se dice que es de tipo 3 si puede ser descrita tanto como una región de tipo 1 como de tipo 2. Es decir, D puede ser descrita como:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

y también como:

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

Teorema 2. Sea $\mathbf{F} = (P, Q)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y sea C una curva en el plano, cerrada, simple, orientada positivamente y diferenciable por trozos, que encierra una región D de tipo III que queda contenida en Ω. Entonces,

$$\oint_{C_+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx\,dy. \tag{0.1}$$

Ejercicios:

Ejercicio 1. Verificar el Teorema de Green para el disco D con centro $(0, 0)$ y radio R y las siguientes funciones:

a) $P(x, y) = xy^2, \quad Q(x, y) = -yx^2.$
b) $P(x, y) = 2y, \quad Q(x, y) = x.$

Ejercicio 2. Verificar el Teorema de Green y calcular

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + x\,dy,$$

siendo $\mathcal{C}$ la curva recorrida en sentido positivo:

a) Cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$.
b) Elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, donde $\mathcal{C}_1 : y = x,\ x \in [0, 1]$ y $\mathcal{C}_2 : y = x^2,\ x \in [0, 1]$.

Ejercicio 3. Usando el teorema de Green, hallar el área de:

a) El disco D con centro $(0, 0)$ y radio R.
b) La región dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 4. Sea D la región encerrada por el eje x y el arco de cicloide:

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Usando el teorema de Green, calcular el área de D.

Ejercicio 5. Hallar el área entre las curvas dadas en coordenadas polares por

$$r = 1 + \cos\theta \qquad \text{con } -\pi \leq \theta \leq \pi,$$
$$r = \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \quad \text{con } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 6. Probar la fórmula de integración por partes: Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada en sentido antihorario y $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ la normal exterior a D, entonces

$$\int_D u\, v_x\, dx\, dy = -\int_D u_x\, v\, dx\, dy + \int_{\partial D} u\, v\, n_1\, ds,$$

para todo par de funciones u, $v \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$.

Ejercicio 7. Sea C la curva definida por la ecuación $x^2 + 3y^2 = 9$, con $x \geq 0$, recorrida en sentido horario. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, siendo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\sin(x) y - \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} - \cos(x) \right).$$

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{C}$ la curva

$$\begin{aligned} &x = 0, \quad 0 \leq y \leq 4, \\ &y = 4, \quad 0 \leq x \leq 4, \\ &y = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ &y = 2 - x, \quad 1 \leq x \leq 2, \\ &y = x - 2, \quad 2 \leq x \leq 3, \\ &y = 4 - x, \quad 2 \leq x \leq 3, \\ &y = x, \quad 2 \leq x \leq 4, \end{aligned}$$

orientada positivamente. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\, dx + \frac{1 - x}{(x-1)^2 + y^2}\, dy.$$

Ejercicio 9. Sea $D = \{(x, y) \, : \, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ x \geq 0\}$. Calcular

$$\int_{\partial D} x^2 y\, dx - x y^2\, dy.$$

Como siempre, ∂D se recorre en sentido directo (sentido contrario a las agujas del reloj).

Ejercicio 10. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.

Ejercicio 11. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen orientada positivamente. Calcular $Q_x - P_y$. ¿Se satisface en este caso el Teorema de Green?

Ejercicio 12. Calcular

$$\int_{\mathcal{C}} f_1\, dx + f_2\, dy,$$

siendo

$$f_1(x, y) = \frac{x \sin\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) - y(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{y \sin\left(\frac{\pi}{2(x^2+y^2)}\right) + x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

y

$$\mathcal{C} = \begin{cases} y = x + 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ y = 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

recorrida desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$.

Ejercicio 13. Determinar todas las circunferencias $\mathcal{C}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ sobre las cuales vale la siguiente igualdad

$$\int_{\mathcal{C}} -y^2\, dx + 3x\, dy = 6\pi.$$

Ejercicio 14. Calcular la integral

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 e^x + \cos x + (x - y)^2,\ 2ye^x + \operatorname{sen} y),$$

y $\mathcal{C}$ es la curva

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0,$$

orientada de manera que comience en $(1, 0)$ y termine en $(-1, 0)$.

Ejercicio 15. Sean u, $v \in C^1(D)$, donde

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Consideremos los campos definidos por

$$\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad \mathbf{G}(x, y) = (v_x - v_y,\ u_x - u_y).$$

Calcular

$$\iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y)\, dx\, dy,$$

sabiendo que sobre el borde de D se tiene $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = 1$.

Ejercicio 16. Probar el teorema de la divergencia para el plano: Si $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio elemental, ∂D su frontera orientada y $\mathbf{n}$ su normal exterior, entonces:

$$\int \int_D \operatorname{Div}(F) dx dy = \int_{\partial D} F \cdot \mathbf{n}\; dS,$$

para todo campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1.