Análisis II – Análisis matemático II – Matemática 3.

Curso de verano 2025

Práctica 1 - Curvas, integral de longitud de arco e integrales curvilíneas.

Repaso:

Definición 1. Una **curva** $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos en el espacio que puede describirse mediante un parámetro que varía de forma continua en un intervalo de la recta real. Más precisamente, $\mathcal{C}$ es una curva si existen funciones continuas $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ definidas en algún intervalo $[a,b]$, tales que un punto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{C}$ si y solo si existe $t \in [a,b]$ tal que:

$$(y_1, \ldots, y_n) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big).$$

Llamemos $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a la función

$$\sigma(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big).$$

Entonces, $\mathcal{C}$ es la imagen de $[a,b]$ bajo σ, y a σ se le llama una **parametrización** de $\mathcal{C}$.

Definición 2. Una curva $\mathcal{C}$ se dice **abierta y simple** si admite una parametrización inyectiva.

Una curva $\mathcal{C}$ se dice **cerrada y simple** si existe una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que:

- σ es inyectiva en $[a,b)$, es decir, $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in [a,b)$ con $t_1 \neq t_2$.
- σ es continua en $[a,b]$.
- $\sigma(a) = \sigma(b)$, es decir, el punto inicial coincide con el punto final.
- La imagen de σ, definida como $\{\sigma(t) : t \in [a,b]\}$, es exactamente $\mathcal{C}$.

Geométricamente, esto significa que la curva no se cruza a sí misma (excepto en el punto inicial y final, que coinciden), y su trayectoria forma un lazo cerrado.

Definición 3. Si $\mathcal{C}$ es una curva cerrada, simple y suave, una parametrización $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se dice **regular** si cumple:

- σ es inyectiva en $[a,b)$.
- La imagen de σ es $\mathcal{C}$.
- $\sigma \in C^1([a,b])$, es decir, σ es continuamente diferenciable en $[a,b]$.
- $\sigma(a) = \sigma(b)$.
- $\sigma'(a) = \sigma'(b)$.
- $\sigma'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in [a,b]$.

Curvas:

Ejercicio 1. a). Probar que

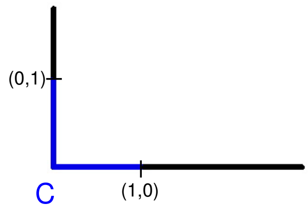
$$\begin{cases} x_1(t) = r\cos(2\pi t), \\ \\ y_1(t) = r\,\mathrm{sen}\,(2\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1, \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x_2(t) = r\cos(4\pi t), \\ \\ y_2(t) = r\,\mathrm{sen}\,(4\pi t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

son dos parametrizaciones C^1 de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r.

b). Probar que la circunferencia es una curva cerrada, simple, suave.

c). Probar que $\sigma_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$, $t \in [0,1]$ no es una parametrización regular.

Ejercicio 2. Considerar la curva $\mathcal{C}$ formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.



Probar que

$$\sigma(t) := \begin{cases} \big(0,(1-t)^2\big), & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ \big((t-1)^2,0\big), & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

es una parametrización C^1 de la curva $\mathcal{C}$.

Observar que $\mathcal{C}$ no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

Ejercicio 3. Sea $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ con $-1 \le t \le 1$.

Probar que σ es una parametrización C^1 del segmento $y = x$, $-1 \le x \le 1$ que es una curva suave.

Observar que $\sigma'(0) = (0,0)$.

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ el arco de parábola $y = x^2$ con $0 \le x \le 1$.

a). Probar que $\mathcal{C}$ es una curva abierta, simple, suave

b). Probar que $\bar\sigma(s) := \big(\bar x(s), \bar y(s)\big)$ dada por

$$\begin{cases} \bar x(s) = e^s - 1 \\ \\ \bar y(s) = (e^s - 1)^2 \end{cases} \qquad 0 \le s \le \ln 2$$

es una parametrizacíón regular de $\mathcal{C}$.

c). Observar que $\sigma(t) := (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$ es otra parametrización regular.

d). Hallar una función $g : [0,1] \to [0, \ln 2]$ tal que $\bar\sigma\big(g(t)\big) = \sigma(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

Observar que g es biyectiva y C^1.

Integral de longitud de arco

Ejercicio 5. Considere la curva definida por $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$. Calcular $\sigma'(t)$, la norma $\|\sigma'(t)\|$, y la longitud del arco entre los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(2\pi)$. Observe que σ describe la posición de un punto en el borde de un círculo de radio 1 que rueda sin deslizar. Esta curva es conocida como cicloide.

Ejercicio 6. En los siguientes casos, calcular la longitud de la curva, donde σ es una parametrización de la misma sobre el intervalo $[a,b]$, siendo:

a) $\sigma(t) = (t, t^2)$, $a = 0$, $b = 1$.

b) $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t+1, t)$, $a = 10$, $b = 20$.

Ejercicio 7. Sea C una curva simple, suave, y sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de C. Definimos la longitud del arco de curva entre los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(t)$ como

$$g(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\|\, d\tau, \quad t \in [a,b].$$

(a) Demostrar que la función $g(t)$ es C^1 y calcular su derivada. Deducir que g es inversible y que su inversa es de clase C^1.

(b) Considerando $\ell = g(b)$, definir la nueva parametrización

$$\tilde{\sigma}(s) = \sigma(g^{-1}(s)), \quad s \in [0, \ell],$$

y demostrar que $\tilde{\sigma}$ es una parametrización regular de C.

(c) Probar que la longitud del arco entre los puntos $\tilde{\sigma}(0)$ y $\tilde{\sigma}(s)$ es igual a s, para todo $s \in [0, \ell]$.

Esto justifica el uso de la notación ds para denotar el diferencial de la longitud de arco.

Ejercicio 8. Evaluar las integrales de longitud de arco $\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds$, donde σ es una parametrización de $\mathcal{C}$, en los casos siguientes:

a). $f(x,y,z) = x + y + z, \quad \sigma(t) = (\text{sen}t, \cos t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

b). $f(x,y,z) = \cos z, \quad \sigma$ como en la parte 1.

c). $f(x,y,z) = x\cos z, \quad \sigma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in [0,1]$.

Ejercicio 9. a). Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

b). Calcular la longitud de la curva $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejercicio 10. Suponer que la semicircunferencia parametrizado por:

$$\sigma(\theta) = (0, a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta), \qquad \theta \in [0, \pi],$$

con $a > 0$, está hecha de alambre con densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

a). ¿Cuál es la masa total del alambre?

b). Si la temperatura ambiente es igual a $x + y - z$ en el punto (x,y,z), calcular la temperatura promedio sobre el alambre.

Ejercicio 11. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable a trozos, el gráfico de f en $[a,b]$ es una curva que se puede parametrizar como $\sigma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a,b]$.

a). Mostrar que la longitud del gráfico de f en [a,b] es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

b). Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

Integrales curvilíneas

Ejercicio 12. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Evaluar la integral curvilínea de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas orientadas $\mathcal{C}$ dadas por las siguientes parametrizaciones:

a). $\sigma(t) = (t,t,t), \quad 0 \leq t \leq 1$.

b). $\sigma(t) = (\sin t, 0, \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejercicio 13. Para las curvas orientadas $\mathcal{C}$ parametrizadas por las correspondientes funciones σ, evaluar las integrales siguientes:

a). $\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

b). $\int_{\mathcal{C}} x\,dx + y\,dy, \quad \sigma(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 2$.

Ejercicio 14. Considerar la fuerza $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

Ejercicio 15. Sea $\mathcal{C}$ una curva orientada suave parametrizada por σ.

a). Suponer que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t. Mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

b). Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$ para todo t, mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} ||\mathbf{F}||\, ds.$$

(Aquí, por paralelo a $\sigma'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}\big(\sigma(t)\big) = \lambda(t)\sigma'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

Ejercicio 16. ¿Cuál es el valor de la integral curvilínea de un campo gradiente sobre una curva cerrada C?

Ejercicio 17. Suponer que $\nabla f(x,y,z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2})$. Si $f(0,0,0) = 5$, hallar $f(1,1,2)$.

Ejercicio 18. Considerar el campo de fuerza gravitacional (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$) por:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z).$$

Mostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional conforme una partícula se mueve de (x_1,y_1,z_1) a (x_2,y_2,z_2), a lo largo de cualquier trayectoria, depende solamente de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

Ejercicio 19. Considere la curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - x^2,\ x+y+z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

a) Obtenga una parametrización regular de C que comience en $(0,1,0)$ y termine en $(1,0,0)$.

b) Calcule la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ con C orientada como en a), donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, y, -z)$.

Ejercicio 20. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función C^1, $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1 y $\mathbf{F} = \nabla f + \mathbf{G}$. Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada, simple, suave, orientada. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ejercicio 21. Sea $\mathcal{C}$ una curva suave, $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de $\mathcal{C}$. Sea $g : [\bar{a}, \bar{b}] \to [a,b]$ una biyección C^1 con $g'(\tau) \neq 0$ para todo $\tau \in [a,b]$. Sea $\bar{\sigma} : [\bar{a}, \bar{b}] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\bar{\sigma}(s) = \sigma\big(g(s)\big)$. Llamamos a $\bar{\sigma}$ una **reparametrización** de σ.

a). Probar que $\bar{\sigma}$ es una parametrización regular de $\mathcal{C}$.

b). Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ da el mismo resultado cuando la integral se evalúa utilizando la parametrización σ o la parametrización $\bar{\sigma}$.

c). Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua. Suponer que orientamos a $\mathcal{C}$ con la orientación dada por σ. Ver que el cálculo de $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ utilizando la parametrización $\bar{\sigma}$ da el mismo resultado que cuando se utiliza σ, si $\bar{\sigma}$ preserva la orientación de $\mathcal{C}$. Ver que si no es así, los resultados difieren sólo en el signo.