Polinomios positivos y sumas de cuadrados - 1er cuatrimestre de 2025

• Los ejercicios con $(*)$ son para entregar.
• La fecha límite para la entrega de todos los ejercicios con $(*)$ es el viernes 15/08/25 (pero se aconseja hacer entregas parciales durante el cuatrimestre).

---

1. Sea F un cuerpo infinito y $f \in F[X_1, \dots, X_n]$ un polinomio no nulo. Probar que existe $x \in F^n$ tal que $F(x) \neq 0$. Probar que el resultado no es necesariamente cierto si F es un cuerpo finito.

2. Sean $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Probar que

$$\operatorname{gr}\Big(\sum_{1 \le i \le m} f_i^2\Big) = 2 \max\{\operatorname{gr}(f_i) \mid 1 \le i \le m\}.$$

3. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ no negativos y tales que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Probar que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \ge x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}.$$

¿Bajo qué condiciones vale la igualdad?

4. (*) El polinomio de Choi-Lam es el polinomio

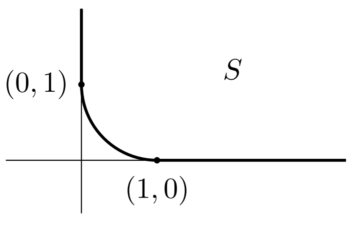
$$f(X, Y, Z) = X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - 4XYZ + 1 \in \mathbb{R}[X, Y, Z].$$

Probar que es no negativo en $\mathbb{R}^3$ pero no es una suma de cuadrados en $\mathbb{R}[X, Y, Z]$.

5. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un cono que no contiene rectas por el origen.
   (a) Probar que si C es cerrado, entonces no contiene ninguna recta.
   (b) Mostrar que el resultado anterior no es necesariamente cierto si C no es cerrado.

6. (*) Sean

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \ge 1\},$$
$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1,\ x + y \le 1\},$$
$$S = S_1 \cup S_2,$$



$$T = \{\lambda \cdot (x, y, 1) \mid \lambda \ge 0,\ (x, y) \in S\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$F = \{\lambda \cdot (0, 1, 1) \mid \lambda \ge 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

   (a) Probar que S es convexo.
   (b) Probar que T es un cono de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Probar que F es una cara de T.
   (d) Probar que no existe un plano H por el origen tal que $T \cap H = F$.

7. (*) Sea $d \in \mathbb{N}$ par. Para $a = (a_d, \ldots, a_0) \in \mathbb{R}^{d+1}$, sea $f_a(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$. Sea
$$\mathcal{C} = \{a \in \mathbb{R}^{d+1} \mid f_a(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}.$$
   (a) Probar que $\mathcal{C}$ es un cono cerrado de $\mathbb{R}^{d+1}$ que no contiene rectas.
   (b) Probar que $b \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ pertenece a un rayo extremo de $\mathcal{C}$ si y sólo si todas las raíces de f_b son reales.

8. Calcular $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}]$.

9. (*) Sean $P = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(k) \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$ y $P_0 = \sum \mathbb{R}[X]^2$. Probar que no existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[X]$ tales que $P = P_0[f_1, \ldots, f_n]$.

10. (a) Probar que $\mathbb{R}(X) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{R}[X], g \neq 0\}$ es un cuerpo real.
   (b) Sea $r \in \mathbb{R}$. Probar que $X - r$ y $r - X$ no son sumas de cuadrados en $\mathbb{R}(X)$.
   (c) Hallar todos los órdenes posibles para $\mathbb{R}(X)$.

11. (*) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f(X) = X^5 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$. Probar que la cantidad de raíces reales de f coincide con
$$1 - \operatorname{sign}(a) + \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(256a^5 + 3125b^4).$$
   Aclaración: Para $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sign}(x) = 0$ si $x = 0$, $\operatorname{sign}(x) = 1$ si $x > 0$ y $\operatorname{sign}(x) = -1$ si $x < 0$.

12. Sean $g_1(X) = X^4 + 8X^3 + 11X^2 - 15X + 4$, $g_2(X) = 2X^3 + 10X^2 - 13X + 4 \in \mathbb{R}[X]$. Hallar todos los $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{<, =, >\}^2$ tales que el sistema
$$\begin{cases} g_1 & \varepsilon_1 & 0, \\ g_2 & \varepsilon_2 & 0, \end{cases}$$
   admite una solución en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia: No hacer las cuentas a mano.

13. (*) Sean $f, g_1, g_2 \in \mathbb{R}[X]$ con $f \neq 0$. En cada uno de los siguientes casos, hallar la cantidad de elementos en el conjunto
$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0,\ g_1(x)\varepsilon_1 0,\ g_2(x)\varepsilon_2 0\}$$
   para cada $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{<, =, >\}^2$:
   (a) $\mathrm{TQ}(f, 1) = 5$, $\mathrm{TQ}(f, g_1) = -2$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2) = 4$, $\mathrm{TQ}(f, g_2) = 3$, $\mathrm{TQ}(f, g_1 g_2) = 0$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2 g_2) = 2$, $\mathrm{TQ}(f, g_2^2) = 5$, $\mathrm{TQ}(f, g_1 g_2^2) = -2$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2 g_2^2) = 4$.
   (b) $\mathrm{TQ}(f, 1) = 6$, $\mathrm{TQ}(f, g_1) = 4$, $\mathrm{TQ}(f, g_1^2) = 4$, $\mathrm{TQ}(f, g_2) = -1$, $\mathrm{TQ}(f, g_1 g_2) = 0$, $\mathrm{TQ}(f, g_2^2) = 5$, $\mathrm{TQ}(f, g_1 g_2^2) = 4$.

14. Decidir si los ideales $I_1 = \langle X^4 + Y^6 \rangle, I_2 = \langle X^7 + Y^2 \rangle \subset \mathbb{R}[X, Y]$ son reales y hallar $\sqrt[R]{I_1}$ y $\sqrt[R]{I_2}$.

15. (*) Sean $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n, q_n \in \sum \mathbb{R}[X]^2$ y además
$$1 + \frac{1}{n} - X^2 = p_n + q_n(1 - X^2)^3.$$
   Probar que
$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{grado}(p_n) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{grado}(q_n) = \infty.$$