

PRÁCTICA 9: TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Ejercicio 1. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z .

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2 . Mostrar que

$$n^\alpha(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $n^\alpha(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$ significa que para todo $M > 0$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|n^\alpha(\bar{X}_n - \mu)| \leq M) = 0.$$

¿Qué sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$?¹

Ejercicio 2. Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Ejercicio 3. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} 1_{(1, \infty)}(x).$$

Calcular aproximadamente $P(\prod_{i=1}^n X_i > e^{55})$ con $n = 100$. *Sugerencia:* Hallar la distribución de $\log X$.

Ejercicio 4. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F . Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria²³

$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i \leq t\}}{n}.$$

a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

b) Mostrar que $\sqrt{n}(F_n(t) - F(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, F(t)(1 - F(t)))$.

¹Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

²Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

³A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F . Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.

Ejercicio 5. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \frac{\sqrt{n} \sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}} \quad W_n = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2,$$

hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejercicio 6. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ . Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \lambda^2)$.

Ejercicio 7. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m , respectivamente. Probar que

$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1) \quad \text{cuando } n, m \rightarrow +\infty.$$

Ejercicio 8. Hallar la función característica de las siguientes distribuciones:

- a) $\mathcal{P}(\lambda)$
- b) $\mathcal{Bi}(n, p)$
- c) $\mathcal{U}(a, b)$
- d) $\varepsilon(\lambda)$
- e) $\Gamma(n, \lambda)$.

Sugerencia: La distribución $\Gamma(n, \lambda)$ coincide con la de la suma de n variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

Calcular a partir de su función característica la esperanza y la varianza de cada una de ellas.

Ejercicio 9. Probar que una variable aleatoria X es simétrica respecto del origen si y sólo si $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ para todo t .

Ejercicio 10.

- a) Calcular la función característica asociada a una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$.

Sugerencia: Utilizar la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2} dx = \pi e^{-|t|}.$$

- b) Verificar que si X es una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ entonces $\phi_{2X} = \phi_X^2$. Observar que esto dice que ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$ aunque X e Y no sean independientes.

- c) Sea $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$. Hallar para cada $n \in \mathbb{N}$ la distribución del promedio $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. ¿Contradicen sus resultados algún teorema conocido?

Ejercicio 11. Sean $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ y $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aleatorias definidas para cada $n \in \mathbb{N}$ como $X_n = c_n Y_n$. Probar que:

- a) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| = c < +\infty$ entonces $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$ con $X \sim \mathcal{C}(0, 1)$.
- b) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| = +\infty$ entonces no existe ninguna variable aleatoria Z tal que $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$.
- c) Si $c_n = \frac{1}{n}$ entonces $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} 0$.

Sugerencia: Puede resultarle útil la desigualdad $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \log(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.