Práctica 8: Convergencias y Ley de los grandes números

Ejercicio 1. Sean X e Y variables aleatorias. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la variable aleatoria $Z_n = \frac{1}{n} \cdot X + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot Y$. Hallar el límite en distribución de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 2. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y X variables aleatorias discretas a valores en $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Mostrar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 3. Sean $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes tales que vale $0 < p_n < 1$ y $\lambda_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$ y $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n$.

a) Si $X_n \sim Bi(k, p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ con $X \sim Bi(k, p)$.

b) Si $Y_n \sim \mathcal{G}(p_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ con $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

c) Si $Z_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ con $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 4. Sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p_n. Probar que si p_n tiende a cero cuando n tiende a infinito de manera tal que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 5. De un bolillero que contiene en su interior B bolillas blancas y N bolillas negras se extraen sucesivamente y sin reposición n de ellas. Sea $X_{B,N}$ la cantidad de bolillas blancas obtenidas.

a) ¿Cuál es la distribución de $X_{B,N}$?

b) Probar que si B y N tienden a infinito de modo tal que $\frac{B}{B+N} \to p$ entonces

$$X_{B,N} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim Bi(n, p).$$

c) Establecer la convergencia en distribución del item b en términos de distribuciones conocidas. [1]

Ejercicio 6. Una máquina produce artículos de 3 clases: A, B y C en proporciones 25 %, 25 % y 50 % respectivamente. Las longitudes de los artículos A y B siguen distribuciones $\mathcal{U}[0, 1]$ y $\mathcal{U}[0, 2]$ respectivamente y las longitudes de los artículos C se distribuyen según la densidad $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) 1_{[0,2]}(x)$. Se eligen n artículos al azar de la producción total y se calcula el promedio de sus longitudes.

a) Dar una cota inferior para la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ si el tamaño de la muestra es $n = 100$.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que el promedio de las longitudes esté comprendido entre $\frac{15}{24}$ y $\frac{19}{24}$ sea mayor o igual que 0.90?

[1] Este ejercicio muestra que si el número de bolillas en el bolillero tiende a infinito entonces sacar con o sin reposición pierde importancia. ¿Por qué será esto?

Ejercicio 7. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que $X_1 \equiv 0$ y para $n \geq 2$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^3} & \text{si} \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n \\ 1 - \dfrac{2}{n^2} & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

Probar que si $\alpha > \frac{1}{2}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n^\alpha} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0.$$

Sugerencia: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ejercicio 8. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Var}(X_n) = 0$.

a) Probar que si $\mathbb{E}(X_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

b) Probar que si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \in \mathbb{R}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu$.

Ejercicio 9. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria, todas ellas definidas sobre el mismo espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Escribir el conjunto $\{X_n \to X\}$ en términos de eventos de la forma $\{|X_n - X| \leq \alpha\}$ con $\alpha > 0$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$.

b) Escribir el conjunto $\{X_n \nrightarrow X\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{|X_n - X| > \alpha\}$ con $\alpha > 0$.

c) Verificar que $\{X_n \to X\} = \{X_n - X \to 0\}$.

d) Sea $L^+ = \limsup_{n\to+\infty} X_n$, i.e., para cada $\omega \in \Omega$ se define $L^+(\omega) = \limsup_{n\to+\infty} X_n(\omega)$.

   i. Para cada $\alpha > 0$ escribir el conjunto $\{L^+ \geq \alpha\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{X_n > r \text{ para infinitos valores de } n\}$ con $r \in \mathbb{R}$ y verificar que es un evento perteneciente a la σ-álgebra $\mathcal{F}$. Deducir que L^+ es una variable aleatoria.

   ii. Para cada $\alpha > 0$ escribir el conjunto $\{L^+ > \alpha\}$ en términos de numerables eventos de la forma $\{X_n > r \text{ para infinitos valores de } n\}$ con $r \in \mathbb{R}$.

e) Demostrar afirmaciones análogas a las del ítem *d*) para $L^- = \liminf_{n\to+\infty} X_n$.

Ejercicio 10. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\varepsilon(1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{X_n}{\log(n+1)}.$$

a) Probar que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

b) Probar que $\mathbb{P}(L^+ = 1) = 1$, donde $L^+ := \limsup_{n\to+\infty} Y_n$.

c) Probar que $\mathbb{P}(L^- = 0) = 1$, donde $L^- := \liminf_{n\to+\infty} Y_n$.

d) Deducir de los ítems anteriores que la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite casi seguro.

Ejercicio 11. Se elige al azar un número X en el intervalo $[0,1]$.[2]

a) Dados $k \in \mathbb{N}$ y una secuencia ordenada de k dígitos $(a_1,\ldots,a_k) \in \{0,\ldots,9\}^k$, calcular la probabilidad para cada $n \in \mathbb{N}$ de que dicha secuencia coincida con la de los dígitos del desarrollo decimal de X entre los lugares n y $n+k-1$.

b) Dados $k \in \mathbb{N}$ y una secuencia ordenada de k dígitos $(a_1,\ldots,a_k) \in \{0,\ldots,9\}^k$, calcular la probabilidad de que dicha secuencia aparezca infinitas veces en el desarrollo decimal de X.

c) Calcular $\mathbb{P}(\text{Ocurren infinitos } A_n)$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el evento A_n como

$$\begin{aligned} A_n = \{&\text{El 9 aparece al menos } n \text{ veces consecutivas en los } 2n \text{ primeros lugares} \\ &\text{del desarrollo decimal de } X\} \end{aligned}$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que X sea racional?

Ejercicio 12. Se tira infinitas veces una moneda de manera independiente y con probabilidad p de obtener cara en cada lanzamiento.

a) Dado $k \in \mathbb{N}$ calcular la probabilidad de obtener infinitas rachas de k caras consecutivas.

b) Sea A_n el evento de obtener una racha de caras consecutivas de longitud no menor que n entre los lanzamientos 2^n y $2^{n+1}-1$. Probar que

$$\mathbb{P}(\text{Ocurren infinitos } A_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sugerencia: Si $p \geq \frac{1}{2}$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}\right]}\right) = +\infty$.

Ejercicio 13.

a) Probar que una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria X si y sólo si toda subsucesión de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene otra subsucesión que converge casi seguramente a X[3].

b) Probar que si toda subsucesión de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene otra subsucesión que converge casi seguramente a X no es cierto que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi seguramente a X.

Ejercicio 14. Una colección $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ de variables aleatorias se dice *acotada en probabilidad* o *tight* si dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto K_ε tal que

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{P}(X_i \notin K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

[2]Si un número admite dos desarrollos decimales se optará por el finito. Por ejemplo, se tomará 0.745 y no $0.744\hat{9}$.

[3]En particular, toda sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad tiene una subsucesión que converge casi seguramente.

a) Probar que toda colección finita de variables aleatorias es acotada en probabilidad.

b) Mostrar que una familia infinita de variables aleatorias no es necesariamente acotada en probabilidad.

c) Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X_0 una variable aleatoria tal que $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X_0$. Probar que la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ está acotada en probabilidad.

d) Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X_0 una variable aleatoria tal que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X_0$. Probar que la familia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ está acotada en probabilidad.

Ejercicio 15. Sean $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores aleatorios sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{X}_0$ otro vector aleatorio sobre $\mathbb{R}^n$.

a) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{c.s.} \mathbf{X}_0$ y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{c.s.} g(\mathbf{X}_0)$.

b) Probar que si $\mathbf{X}_k \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{X}_0$ y $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función continua entonces $g(\mathbf{X}_k) \xrightarrow{\mathcal{P}} g(\mathbf{X}_0)$.
Sugerencia: Hay dos posibilidades. La más fácil, tomar subsucesión de la subsucesión. La otra, tener presente que $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión acotada en probabilidad y que toda función continua es uniformemente continua sobre compactos.

Ejercicio 16. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de variables aleatorias.

a) Probar que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en probabilidad entonces $X_nY_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

b) Probar que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Y$ entonces $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X+Y$ y que $X_nY_n \xrightarrow{\mathcal{P}} XY$.

Ejercicio 17. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias.

a) Sea X una variable aleatoria. Definimos a Z por

$$Z = \begin{cases} \dfrac{1}{X} & \text{si } X \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{si } X = 0. \end{cases}$$

Probar que Z es una variable aleatoria. La notaremos por $\dfrac{1}{X}$.

b) Supongamos que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ con $P(X=0)=0$. Probar que $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{c.s.} \dfrac{1}{X}$, donde $\dfrac{1}{X_n}$ se define como en el ítem anterior.

c) Supongamos que $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ con $P(X=0)=0$. Probar que $\dfrac{1}{X_n} \xrightarrow{\mathcal{P}} \dfrac{1}{X}$.

Sugerencia: Tomar subsucesión de la subsucesión.

Ejercicio 18. Sean $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to+\infty}\mu_n = \mu$ y $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n = \sigma$.

a) Probar que si $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.[4]

b) ¿Qué sucede con la convergencia en distribución si $|\mu| = +\infty$ o $\sigma = +\infty$?

Ejercicio 19. Hallar el límite en distribución de la sucesión $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria Z_n tiene distribución uniforme en el conjunto $\{\frac{i}{n} : 1 \leq i \leq n\}$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria nZ_n tiene distribución geométrica de parámetro $\frac{\lambda}{n}$.

Ejercicio 20. Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[a, b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias

$$Y_n = \min\{U_1, \ldots, U_n\} \qquad \text{y} \qquad Z_n = \max\{U_1, \ldots, U_n\}.$$

a) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Hallar los límites en distribución de las sucesiones $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n(Y_n - a) \qquad \text{y} \qquad W_n = n(b - Z_n).$$

Ejercicio 21. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$. Hallar el límite casi seguro de la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la variable aleatoria Y_n se define como

$$Y_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}.$$

Ejercicio 22. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 1$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < +\infty$. Probar que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n X_i^2}} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 23. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con $\mathbb{E}(|X_1|) = +\infty$.

a) Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > kn) = +\infty$.

b) Probar que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{n} = +\infty$ c.s.

c) Deducir que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{n} = +\infty$ c.s., donde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

d) Concluir del ítem anterior que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{c.s.} \mu$ para cierto $\mu \in \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$.

[4] Por convención, denotamos por $\mathrm{N}(\mu, 0)$ a la variable aleatoria constante μ.

Ejercicio 24. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $V(X_1) = \sigma^2$, y $\mathbb{E}(X_1^4) < +\infty$. Sean $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ y $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ que, en contextos estadísticos se denominan la *media muestral* y la *varianza muestral*, respectivamente.

a) Hallar la esperanza y la varianza de $\overline{X}_n$.

b) Probar que $\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}_n^2$ y que $\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = \sigma^2$.
Sugerencia: recordar que la fórmula $\text{Var}(W) = \mathbb{E}\left(W^2\right) - \mathbb{E}\left(W\right)^2$ puede usarse para calcular $\mathbb{E}\left(W^2\right)$.

c) Probar que $S_n^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma^2$.