Práctica 9: Teorema Central del Límite y función característica

Ejercicio 1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión que satisface $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - X) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ para ciertas variables aleatorias X y Z.

a) Probar que $X_n \xrightarrow{P} X$.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con media μ y varianza σ^2. Mostrar que

$$n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \\ \\ \infty & \text{si } \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

donde $n^\alpha(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{P} \infty$ significa que para todo $M > 0$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} P(|n^\alpha(\overline{X}_n - \mu)| \leq M) = 0.$$

¿Qué sucede si $\alpha = \frac{1}{2}$?[1]

Ejercicio 2. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias y X otra variable aleatoria no necesariamente definidas sobre un mismo espacio. Probar que $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ si y sólo si $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$ para toda $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

Ejercicio 3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión que satisface que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias tal que $a_n(X_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ para un determinado parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ y cierta variable aleatoria X.

a) Probar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en μ entonces

$$a_n(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} g'(\mu)X.$$

Sugerencia: Observar que para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos la escritura

$$g(x) = g(\mu) + (g'(\mu) + T(x))(x - \mu),$$

donde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $T(\mu) = 0$.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con esperanza μ y varianza σ^2. Probar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en μ entonces

$$\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{D}} g'(\mu)N(0, \sigma^2).$$

[1] Observar que esto muestra que las fluctuaciones del promedio con respecto a su media son de orden $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en el casos de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita.

Ejercicio 4.

a) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad dada por
$$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(x).$$
Calcular aproximadamente $P\left(\prod_{i=1}^n X_i > e^{55}\right)$ con $n = 100$. *Sugerencia*: Hallar la distribución de $\log X$.

b) Hallar n tal que el error cometido sea menor a 0.1.

Ejercicio 5. Rehacer el ejercicio 6 de la práctica 8 utilizando el Teorema del Límite Central: pero donde se pide acotar la probabilidad, calcularla de manera aproximada. Comparar con la cota obtenida a partir de la desigualdad de Tchebychev.

Ejercicio 6. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$ se define la variable aleatoria[2][3]
$$F_n(t) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i \le t\}}{n}.$$

a) Probar que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $F_n(t) \xrightarrow{cs} F(t)$.

b) Mostrar que $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}\big(0, F(t)(1 - F(t))\big)$.

Ejercicio 7. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[0,\theta]$ para cierto $\theta > 0$. Probar que $\sqrt{n}\big(\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N}\big(0, 3^{-1}\big)$.

Ejercicio 8. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = 2$ y $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos las variables aleatorias
$$Y_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2} \qquad Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i}^2}} \qquad W_n = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2,$$
hallar el límite en distribución de las sucesiones $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 9. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetro λ. Hallar el límite en distribución de $\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \lambda^2)$.

Ejercicio 10. Sean X_n e Y_m dos variables aleatorias independientes con distribución Poisson de parámetros n y m, respectivamente. Probar que
$$\frac{(X_n - n) + (Y_m - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathrm{N}(0,1) \quad \text{cuando } n, m \to +\infty.$$

Ejercicio 11. Se realizan n ensayos Bernoulli en forma independiente, cada uno de ellos con probabilidad de éxito 0.6.

[2]Observar que la aplicación $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de distribución acumulada aleatoria, es decir, si definimos $F_n : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F_n(\omega, t) = F_n(t)(\omega)$ entonces para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación $F_n(\omega, \cdot)$ es una función de distribución acumulada.

[3]A las funciones de distribución acumulada F_n se las conoce como *medidas empíricas* (o *funciones de distribución muestral*) y son estimadores de la función de distribución F. Valen resultados de convergencia de F_n a F aún más fuertes de los que se muestran aquí.

a) Si $n = 10^4$, estimar la probabilidad de que se produzcan entre 7901 y 8100 éxitos. Acotar el error.

b) Hallar n tal que el error cometido sea menor a 0.1.

Ejercicio 12. Hallar la función característica de las siguientes distribuciones:

a) $\mathcal{P}(\lambda)$

b) $\mathcal{B}i(n, p)$

c) $\mathcal{U}(a, b)$

d) $\varepsilon(\lambda)$

e) $\Gamma(n, \lambda)$.

Sugerencia: La distribución $\Gamma(n, \lambda)$ coincide con la de la suma de n variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

Calcular a partir de su función característica la esperanza y la varianza de cada una de ellas.

Ejercicio 13. Probar que una variable aleatoria X es simétrica respecto del origen si y sólo si $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ para todo t.

Ejercicio 14.

a) Calcular la función característica asociada a una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$.

Sugerencia: Utilizar la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}.$$

b) Verificar que si X es una variable aleatoria con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ entonces $\phi_{2X} = \phi_X^2$. Observar que esto dice que ϕ_{X+Y} puede coincidir con $\phi_X \cdot \phi_Y$ aunque X e Y no sean independientes.

c) Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$. Hallar para cada $n \in \mathbb{N}$ la distribución del promedio $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. ¿Contradicen sus resultados algún teorema conocido?

Ejercicio 15. Sean $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias definidas para cada $n \in \mathbb{N}$ como $X_n = c_n Y_n$. Probar que:

a) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| = c < +\infty$ entonces $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$ con $X \sim \mathcal{C}(0, 1)$.

b) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| = +\infty$ entonces no existe ninguna variable aleatoria Z tal que $\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$.

c) Si $c_n = \frac{1}{n}$ entonces $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P} 0$.

Sugerencia: Puede resultarle útil la desigualdad $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \log(n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.